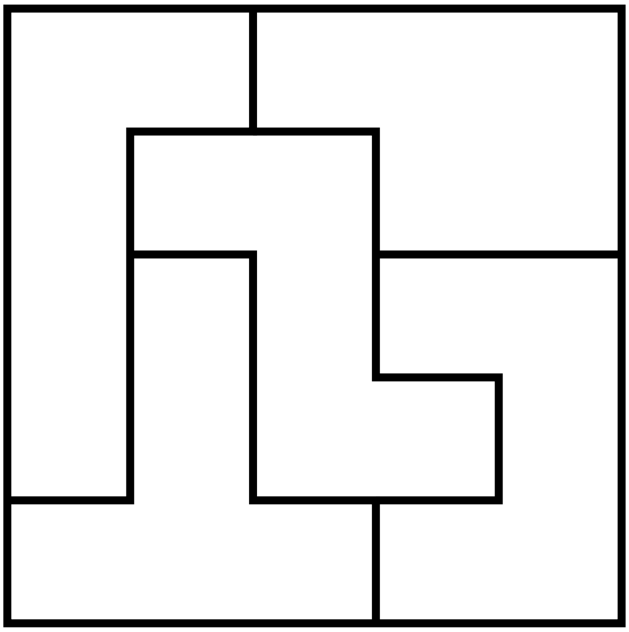
101 défis (mathématiques) à manipuler !

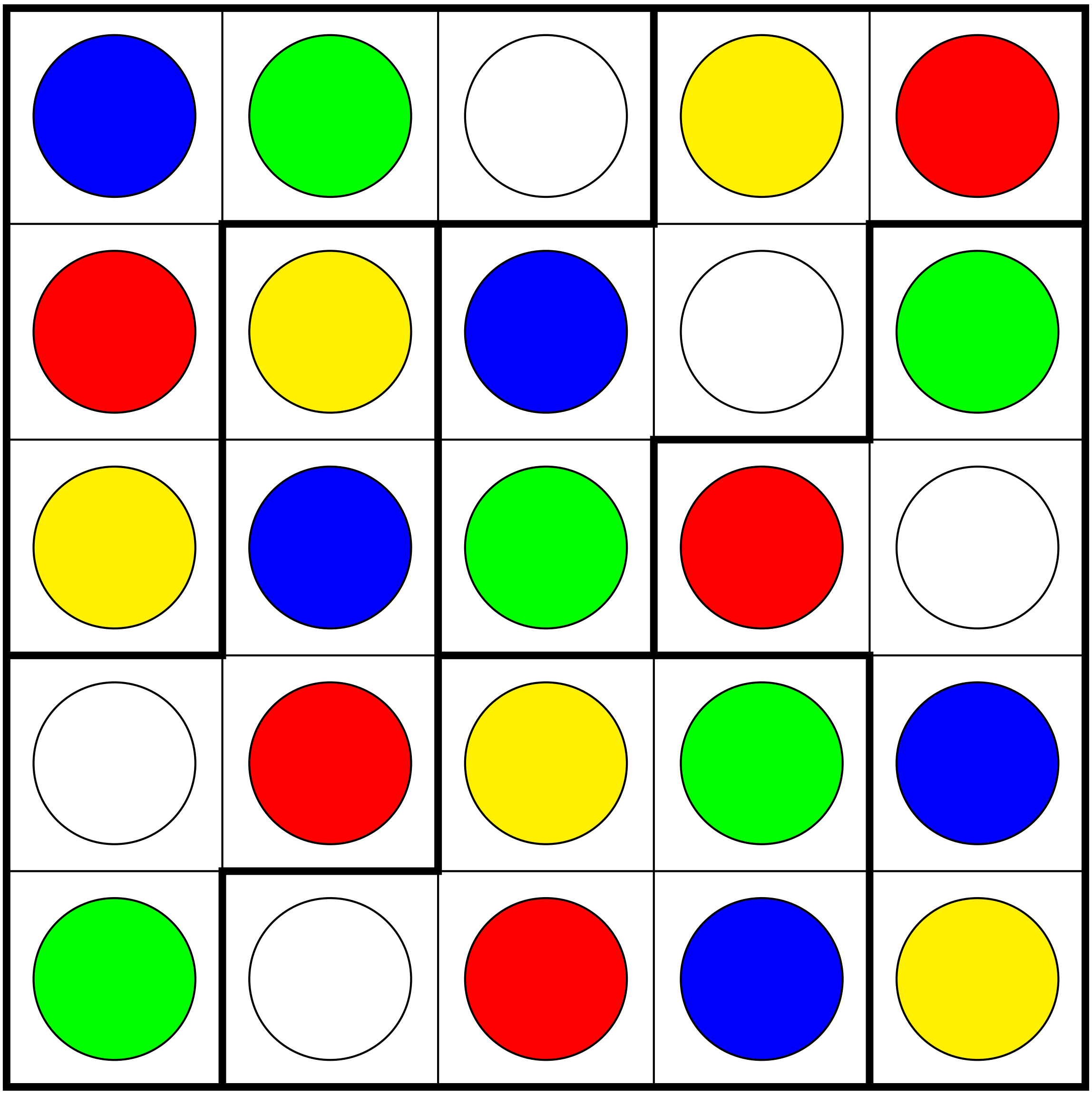
Solutions

Tapuscrit : Arnaud Gazagnes, aidé de LaTeX 2_ε. Réalisation pour l'APMEP

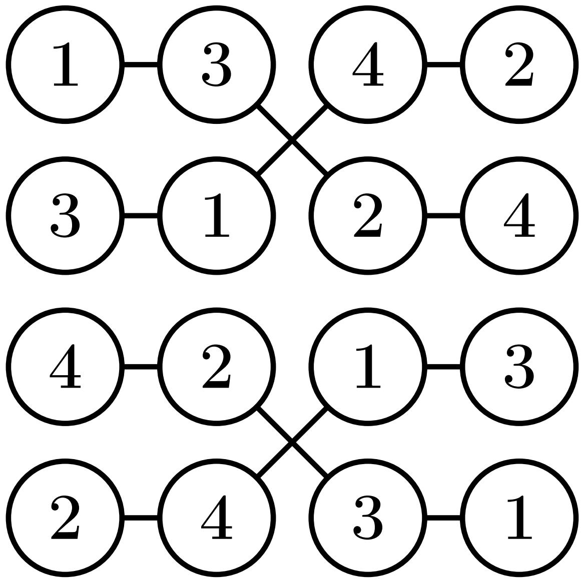
Solution du défi 1



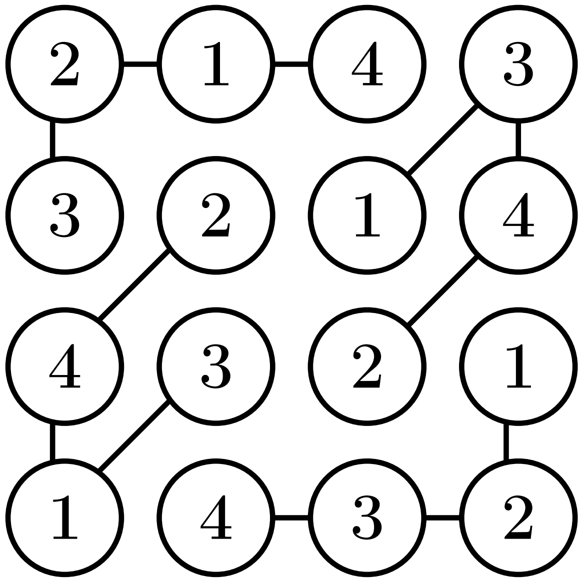
Solution du défi 2



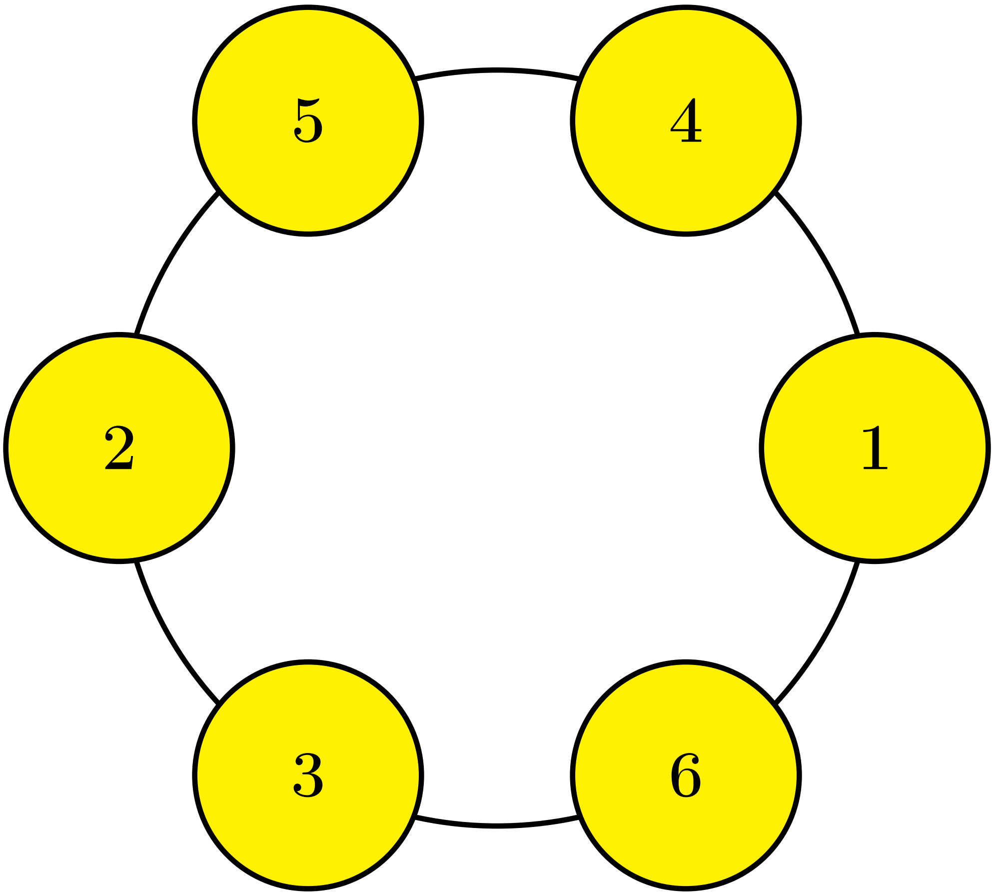
Solution du défi 3



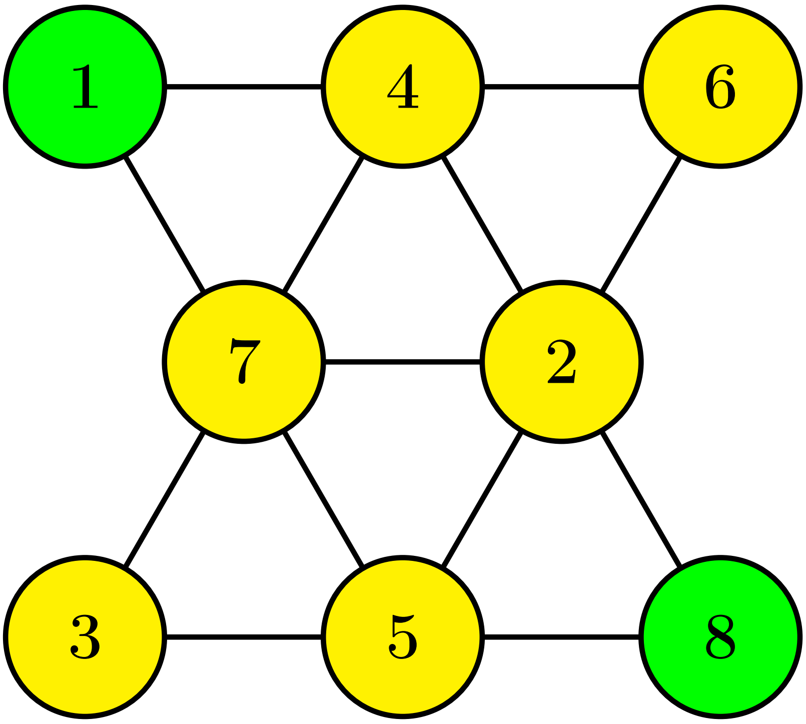
Solution du défi 4

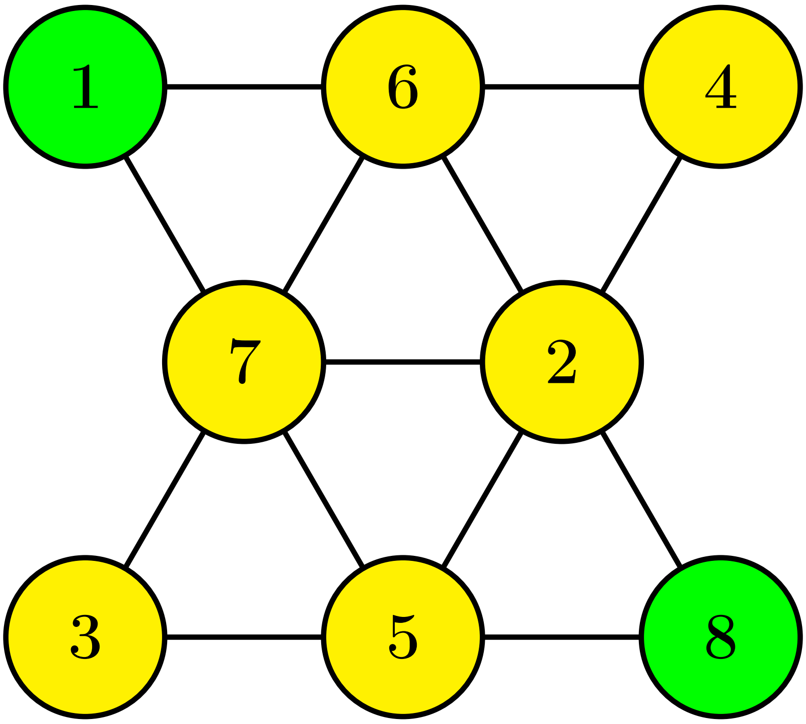


Solution du défi 5

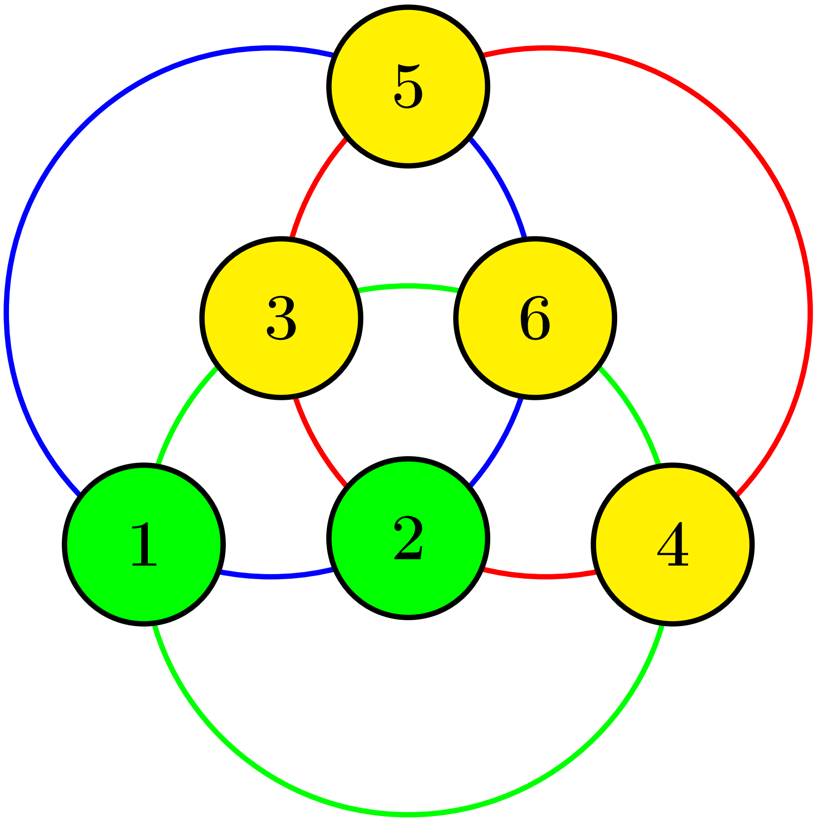


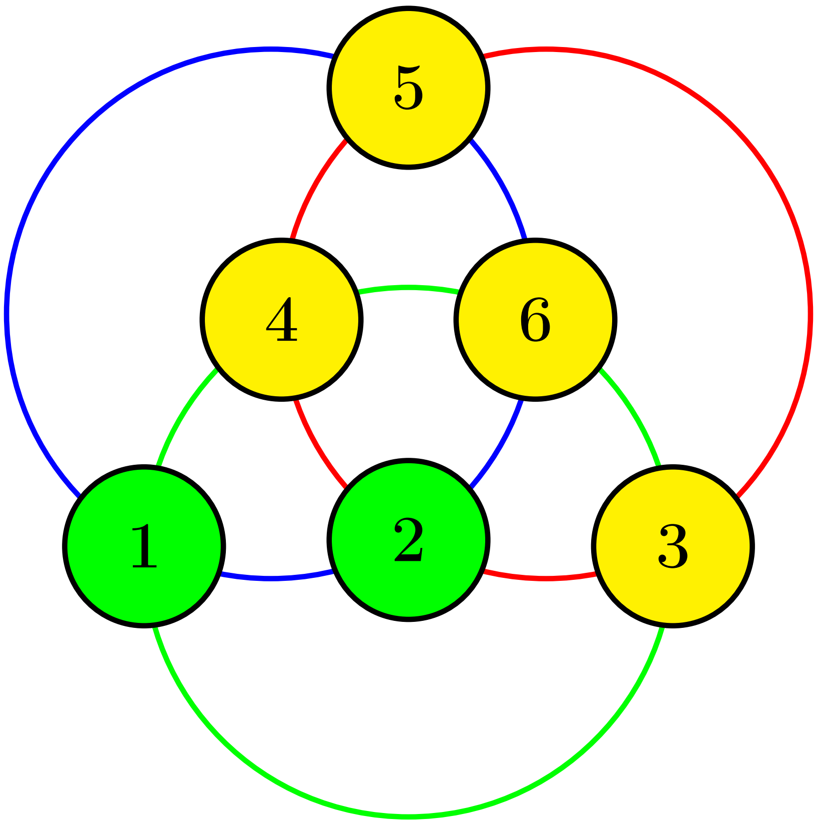
Solution du défi 6





Solution du défi 7





Solution du défi 8

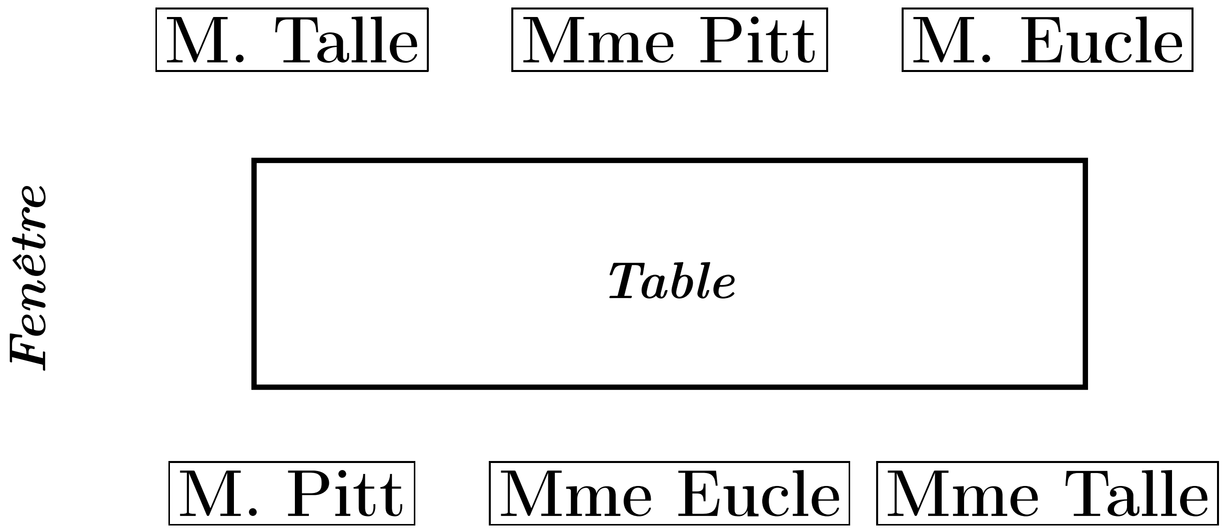
Solution 1

3	9	6
5	2	8
7	4	1

Solution 2

7	4	1
3	9	6
5	2	8

Solution du défi 9



Solution du défi 10

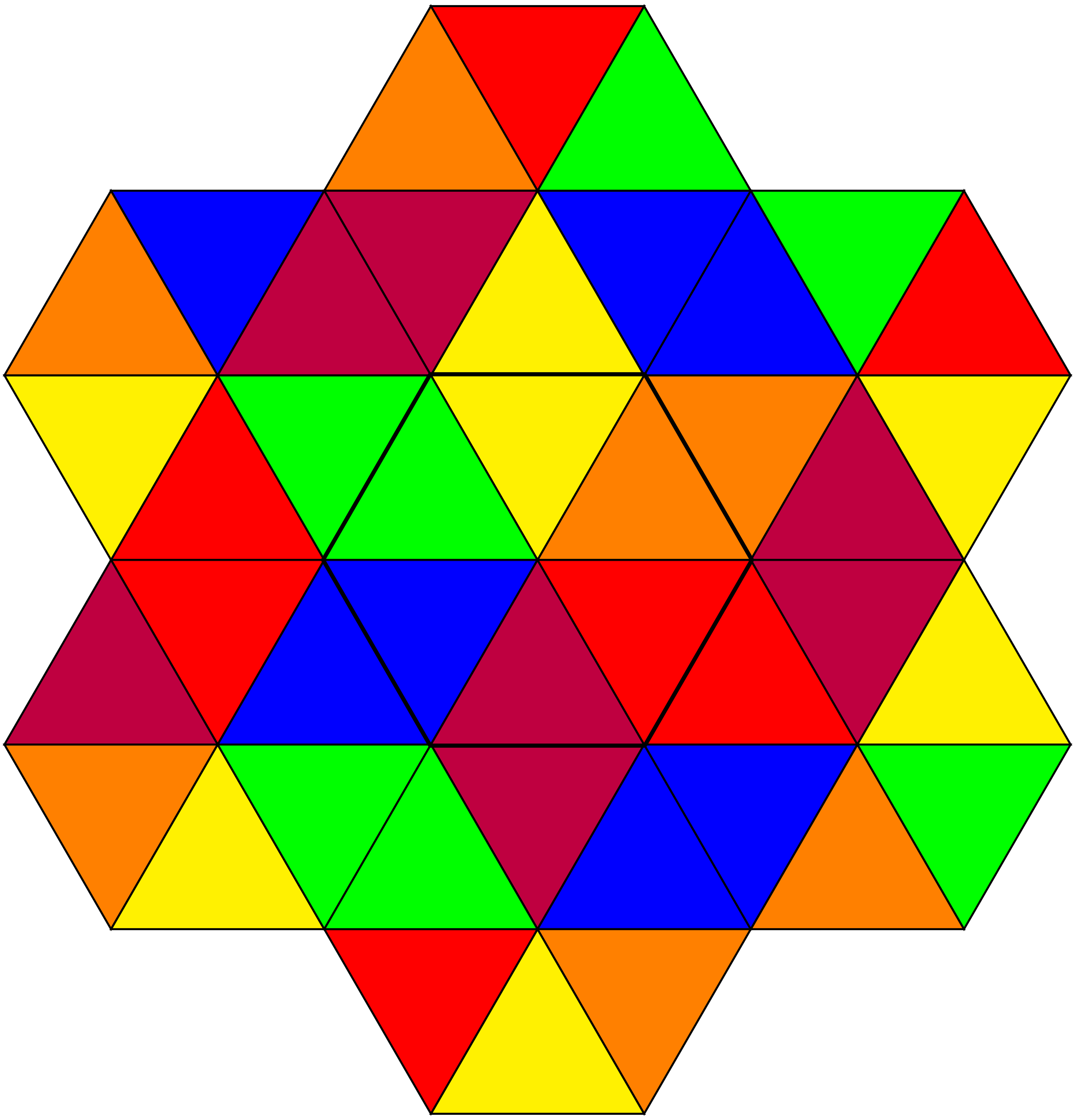
$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 = 4$$

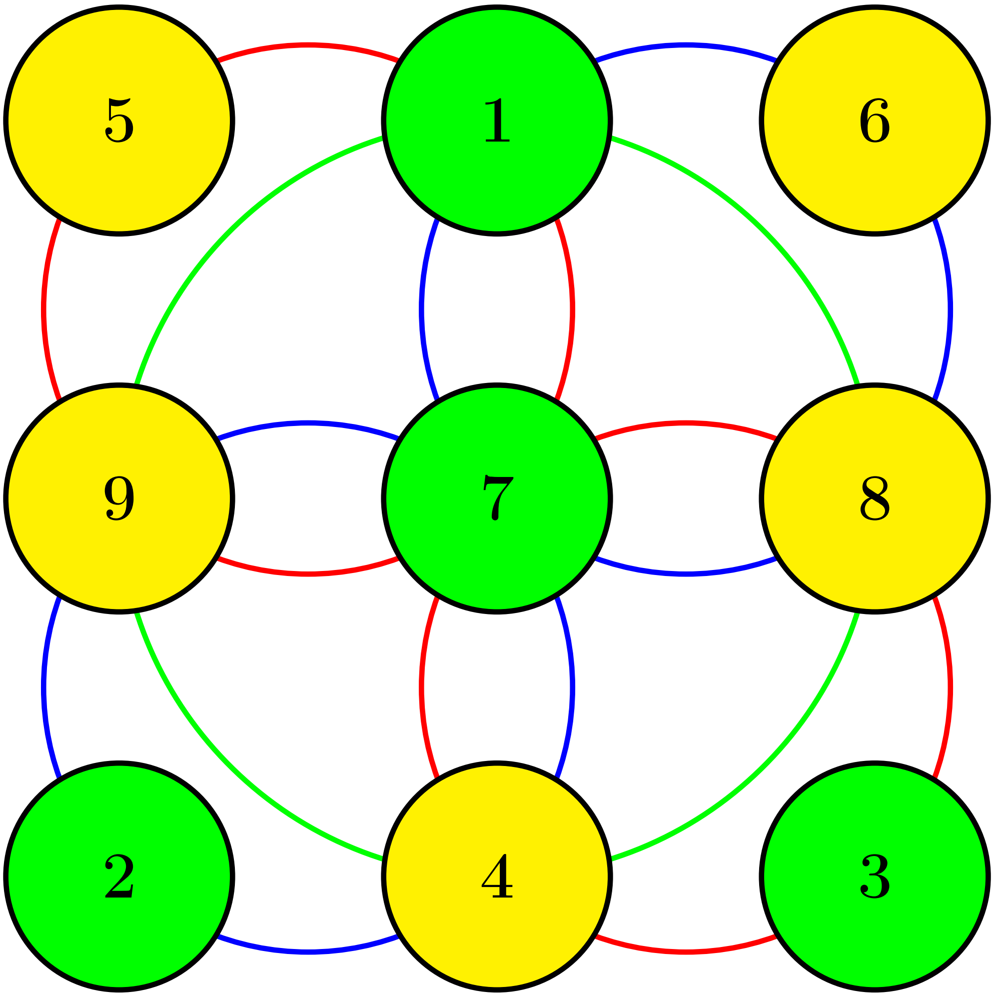
$$2 + 2 = 4$$

$$1 + 2 = 3$$

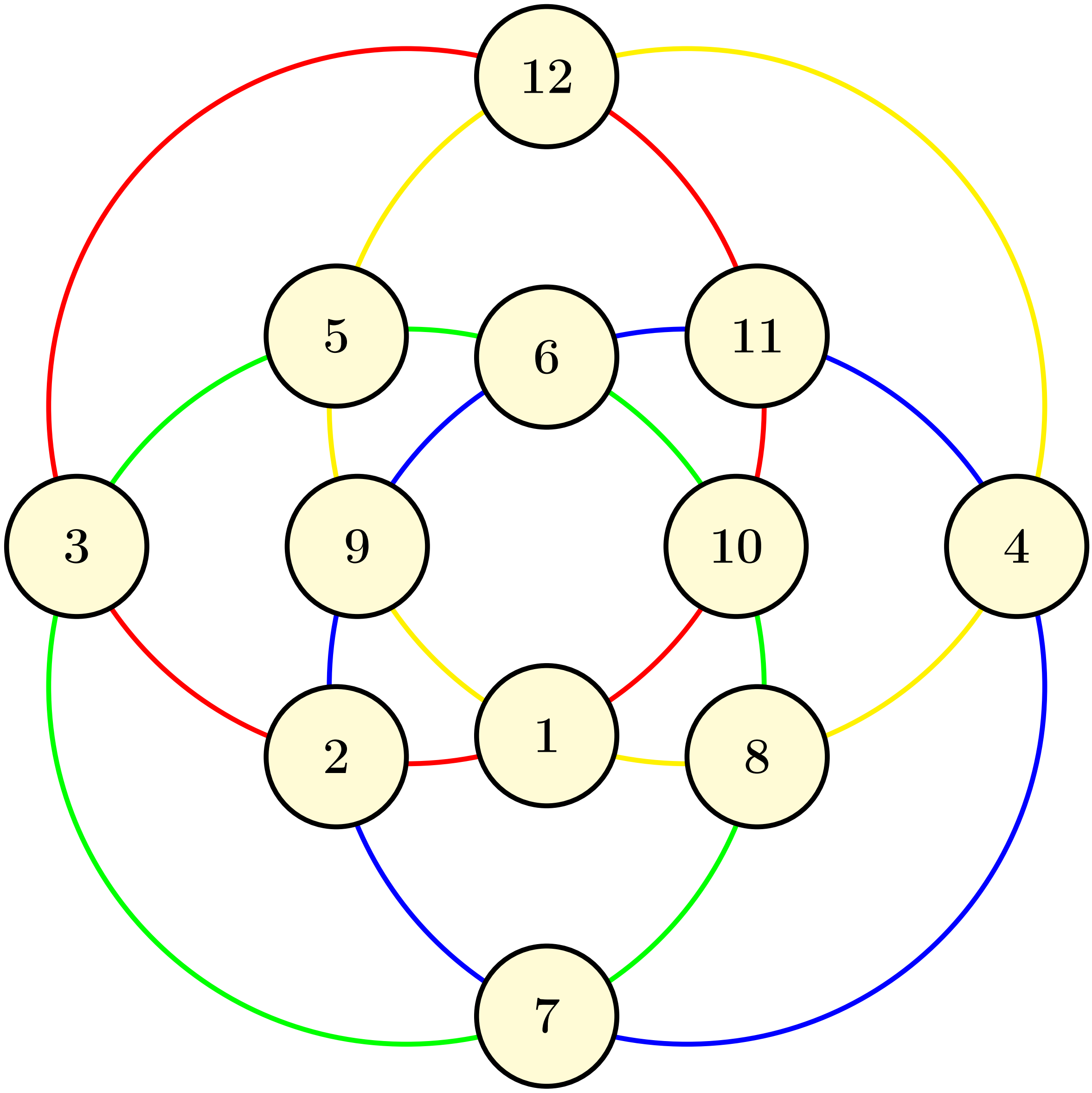
Solution du défi 11



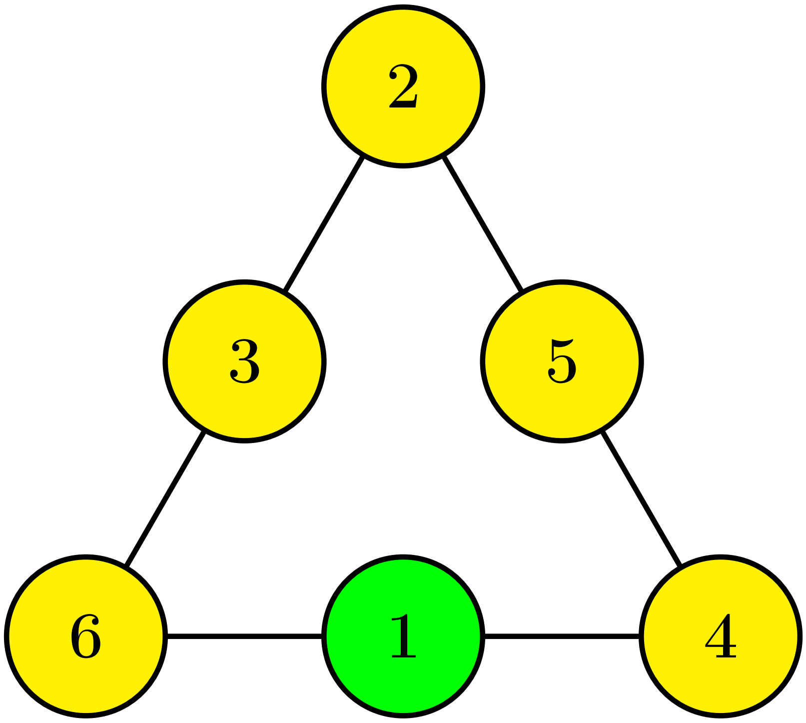
Solution du défi 12

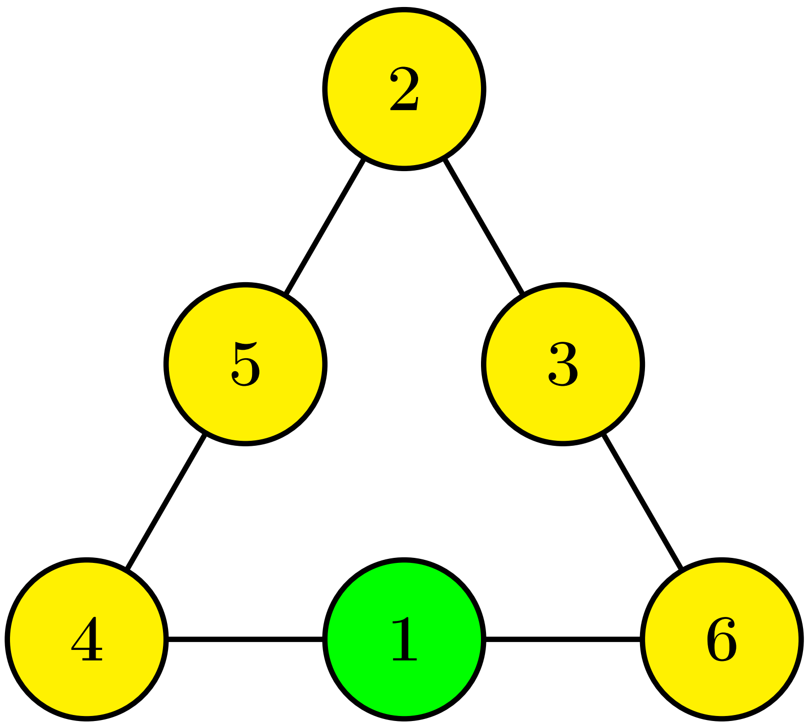


Solution du défi 13



Solution du défi 14



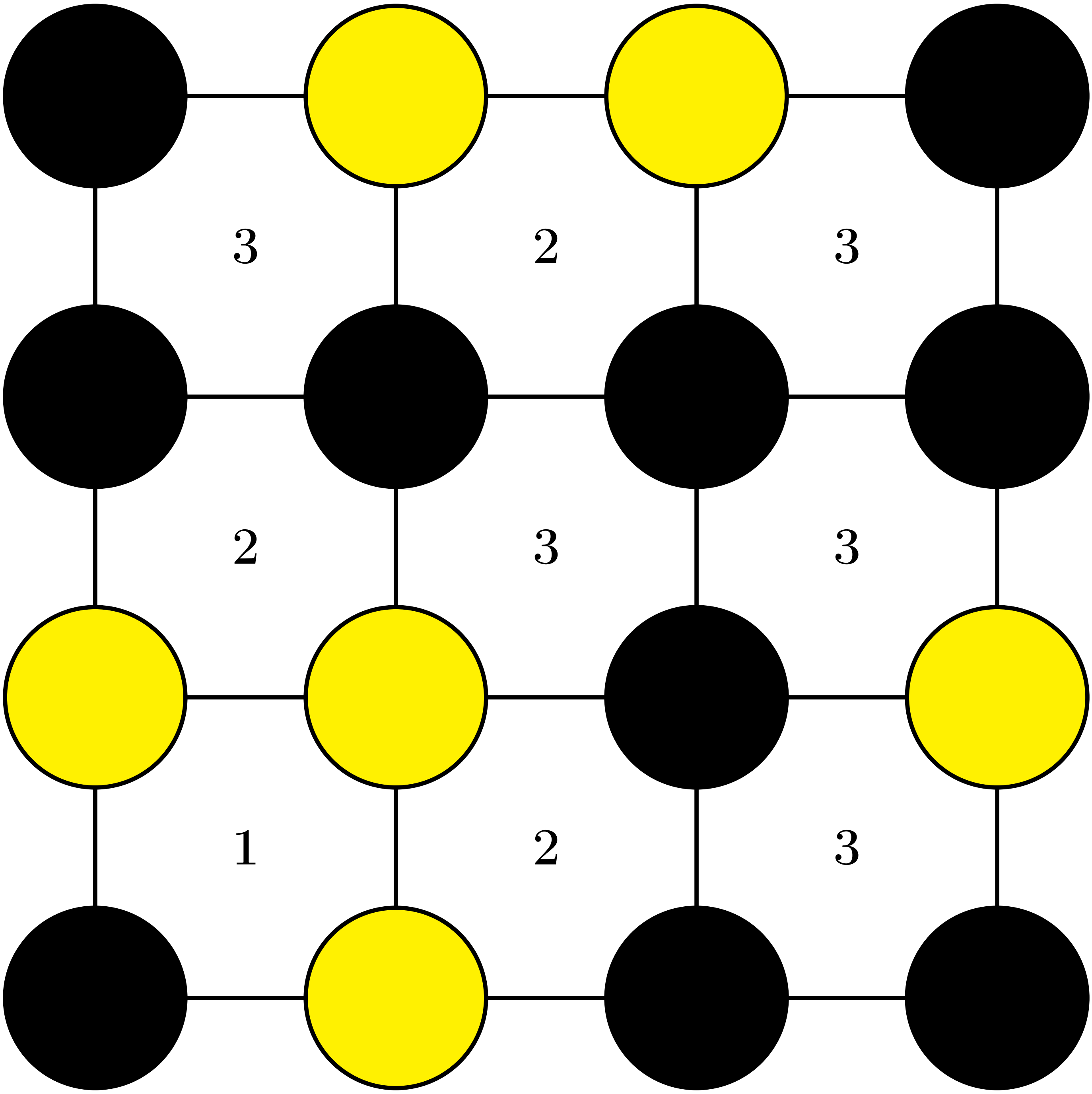


Solution du défi 15

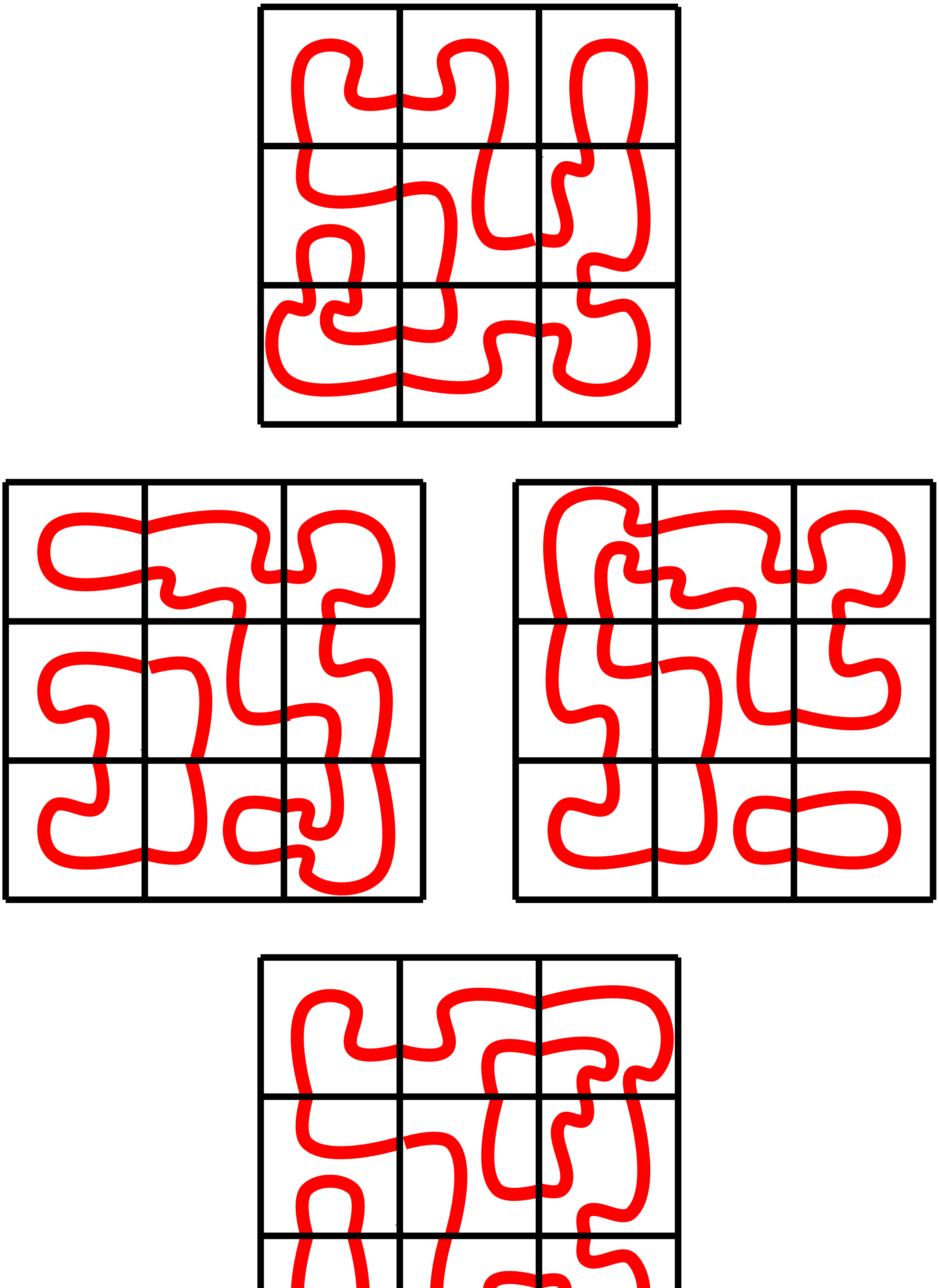
Lettre à déplacer successivement :

$$T \; M \; S \; A \; H \; T$$

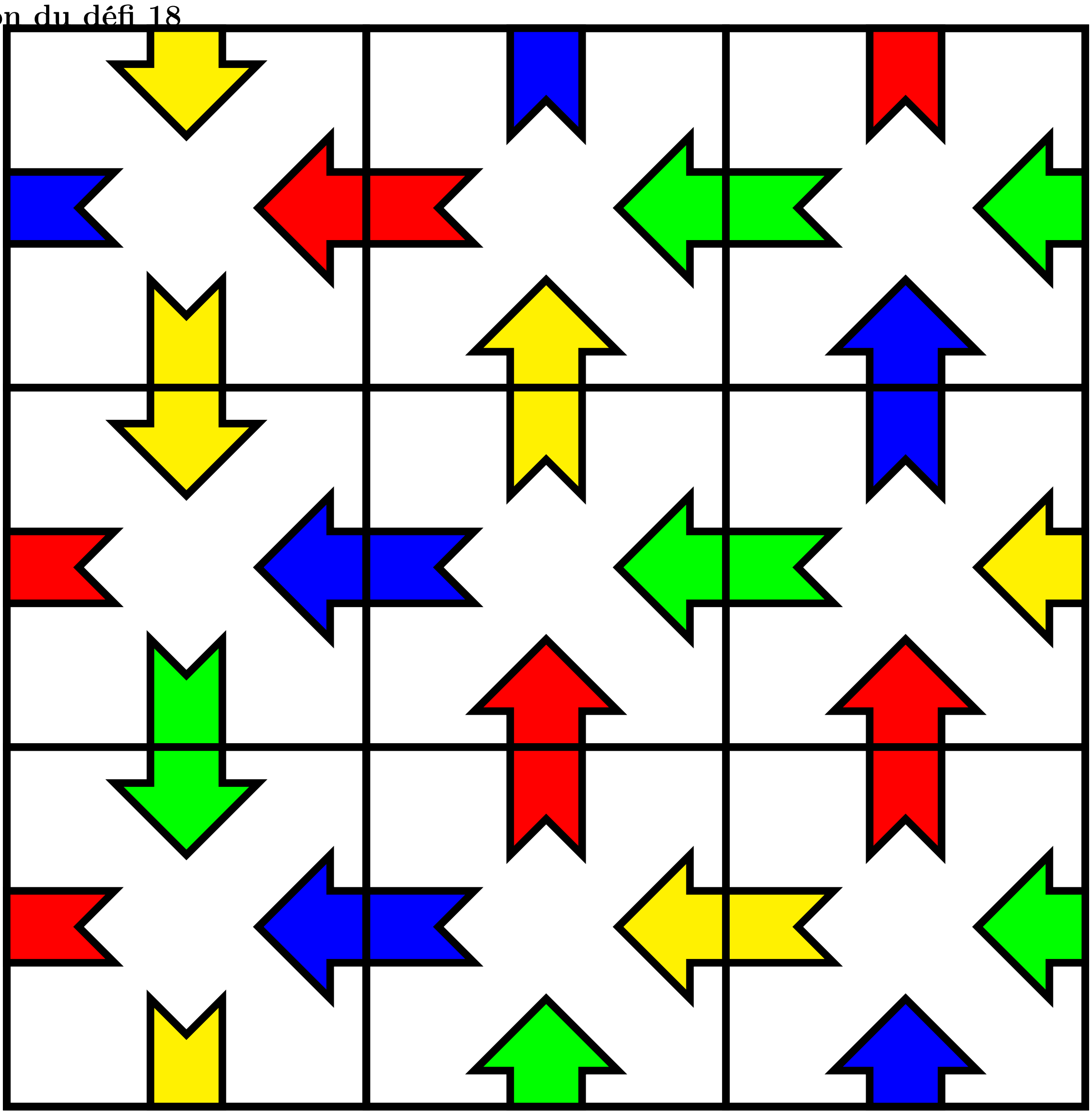
Solution du défi 16



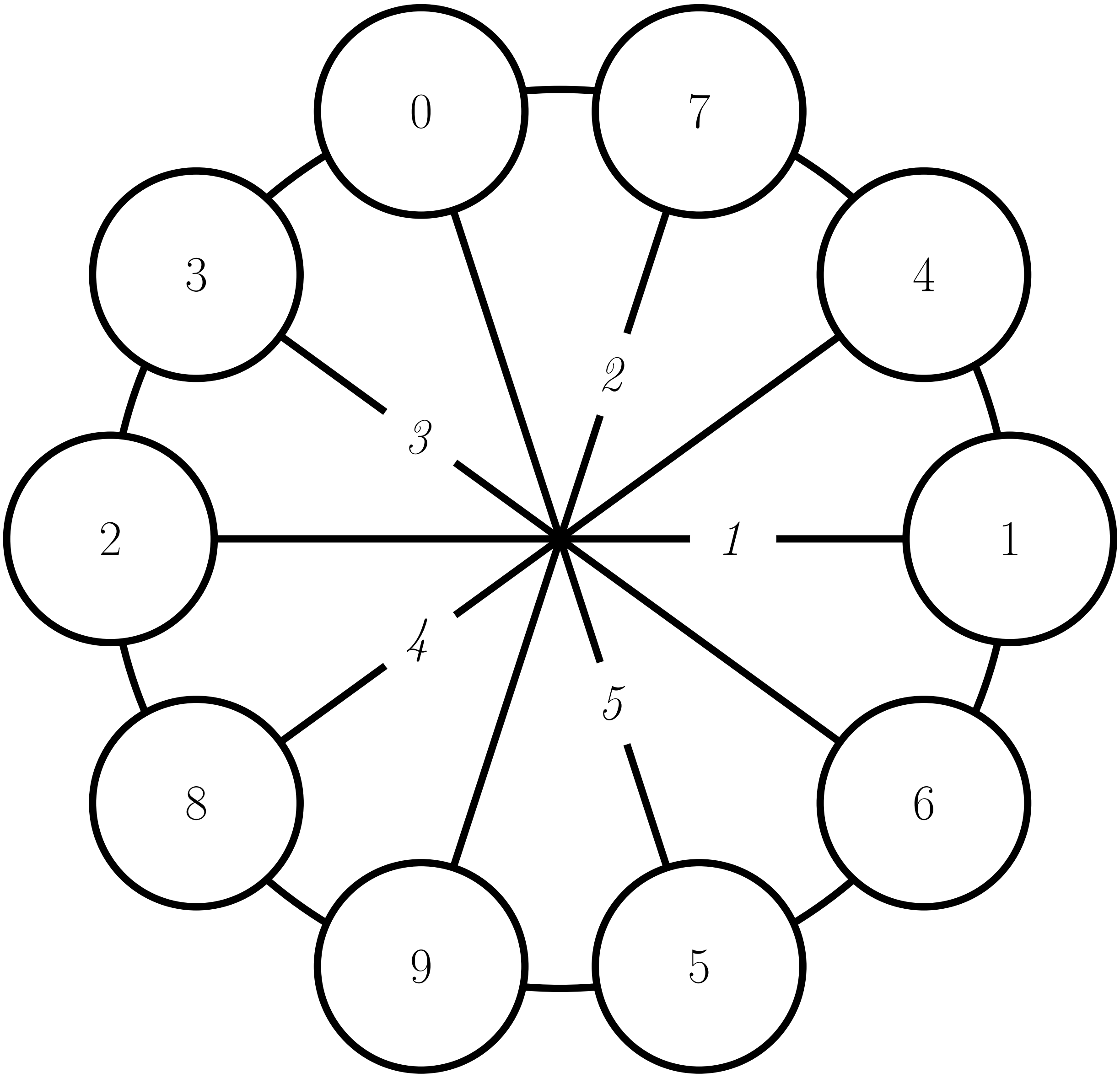
Solution du défi 17



Solution du défi 18



Solution du défi 19



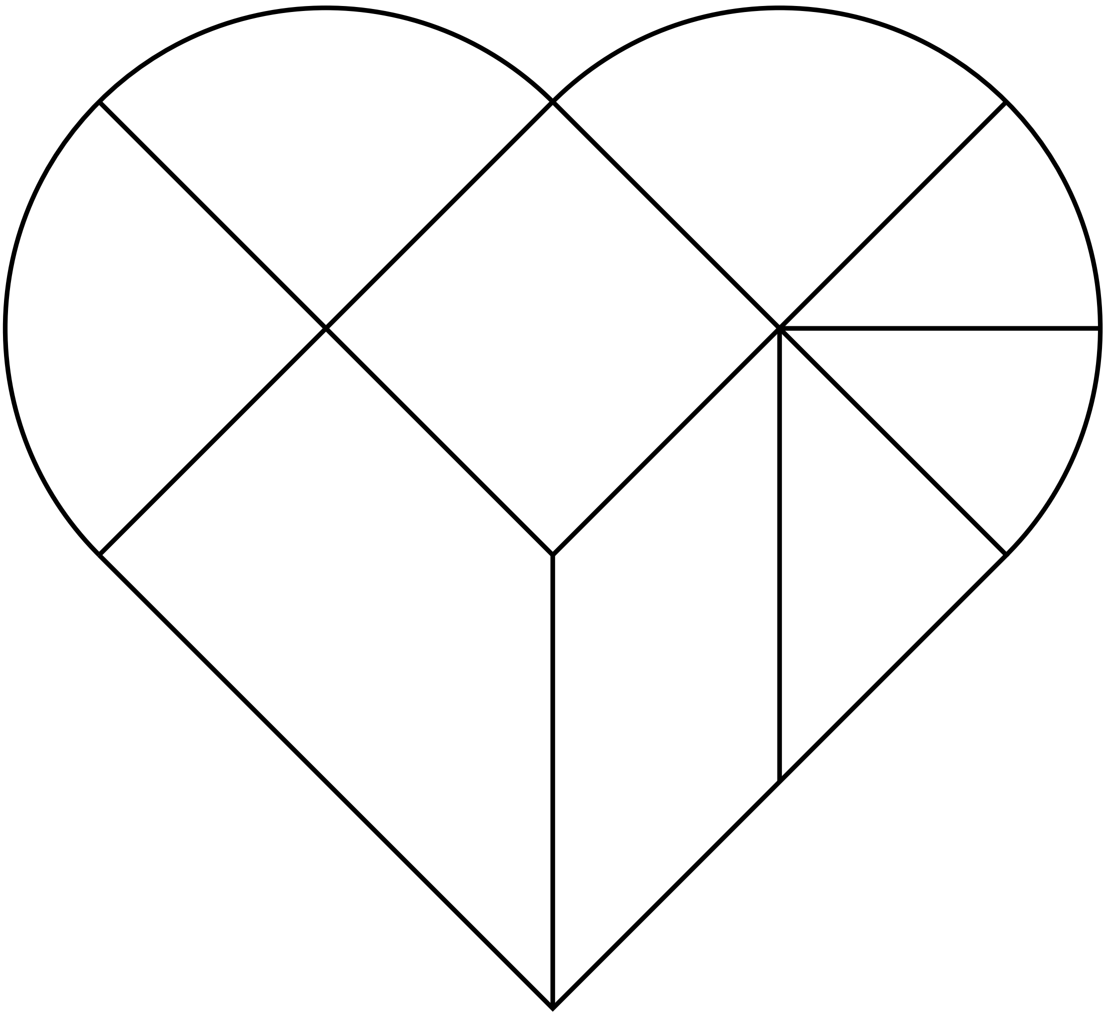
Une solution

Solution du défi 20

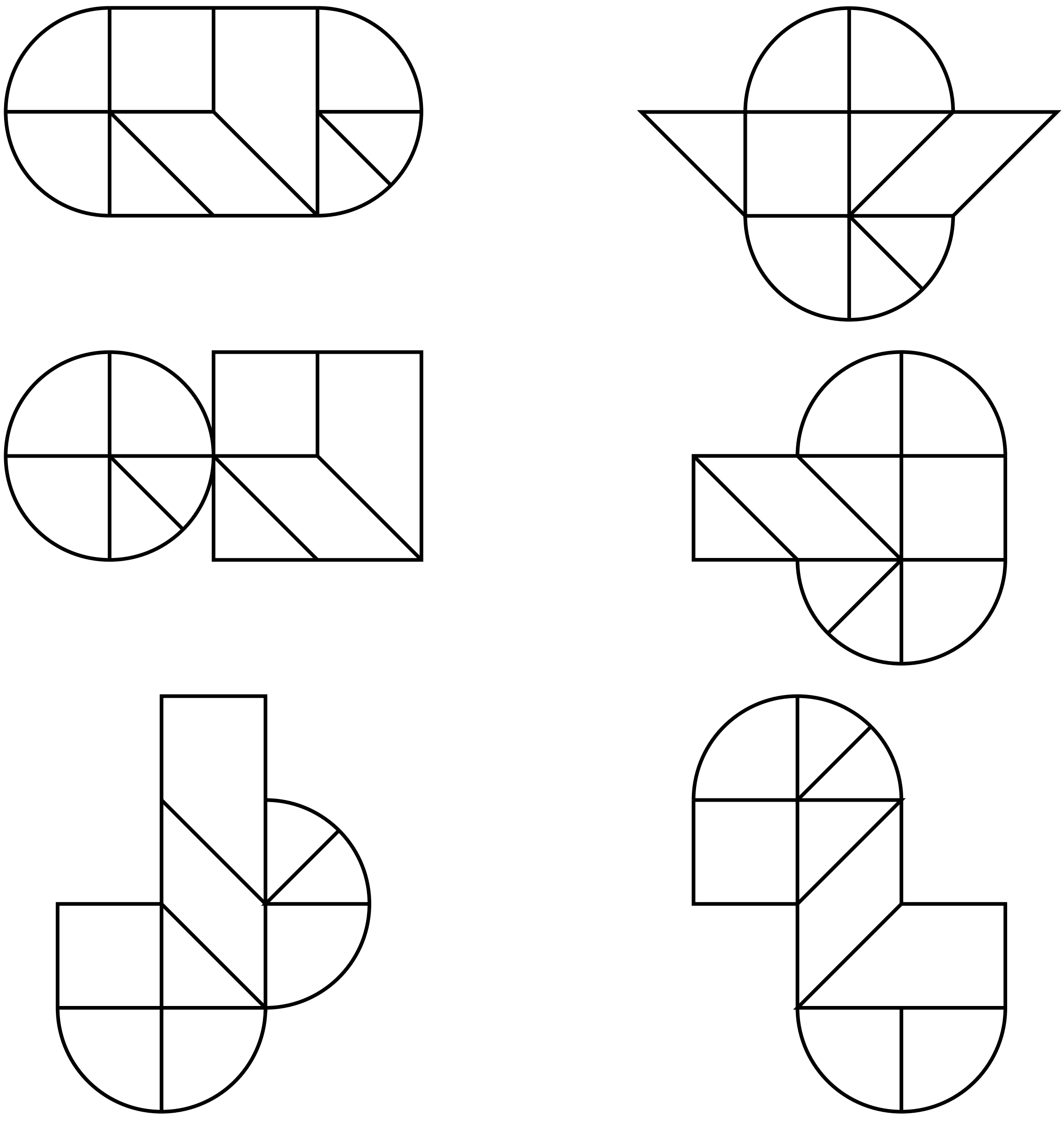
L'information « 3 » permet de remplir la deuxième ligne.
L'information « 1 » permet de placer un gratte-ciel de hauteur « 30 » en bas de la seconde colonne puis un gratte-ciel de hauteur « 10 » en haut.
L'information « 2 » permet de de placer un gratte-ciel de hauteur « 20 » à gauche dans la première ligne puis un gratte-ciel de hauteur « 30 » à droite.
La grille se complète ensuite facilement.

20	10	30
30	20	10
10	30	20

Solution du défi 21

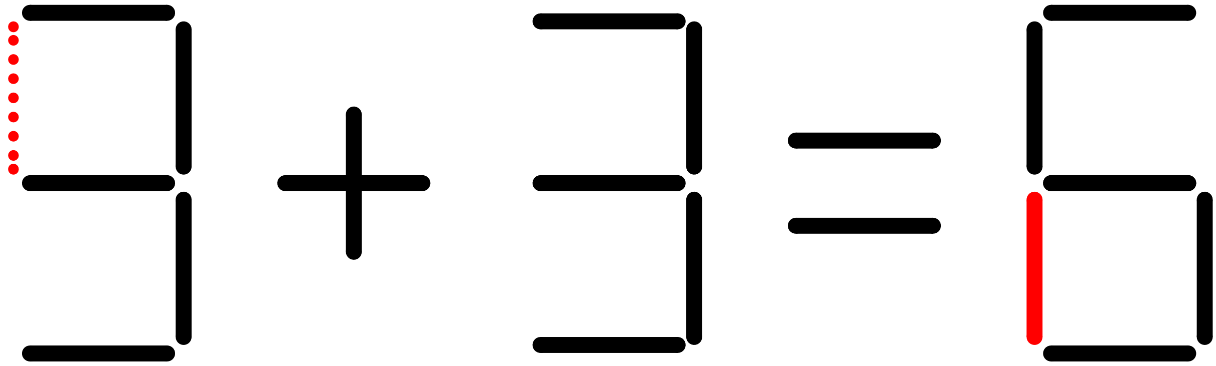


Solution du défi 22

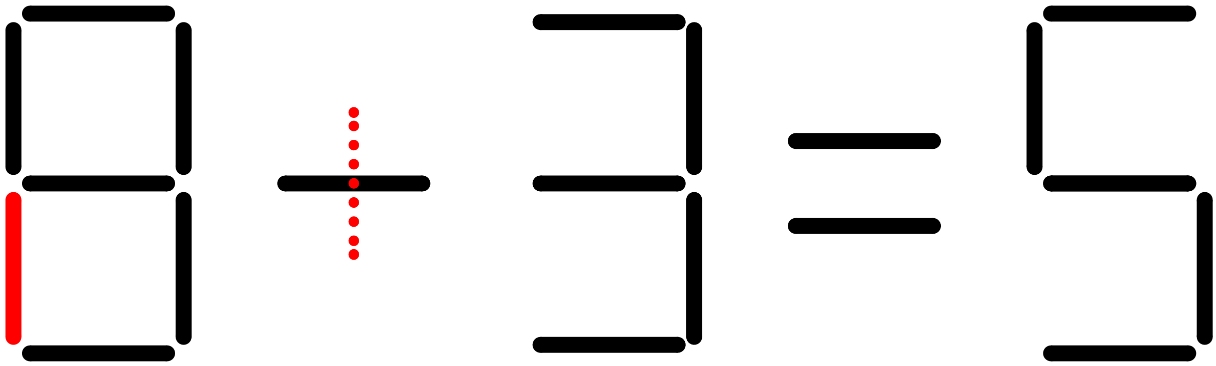


Solution du défi 23

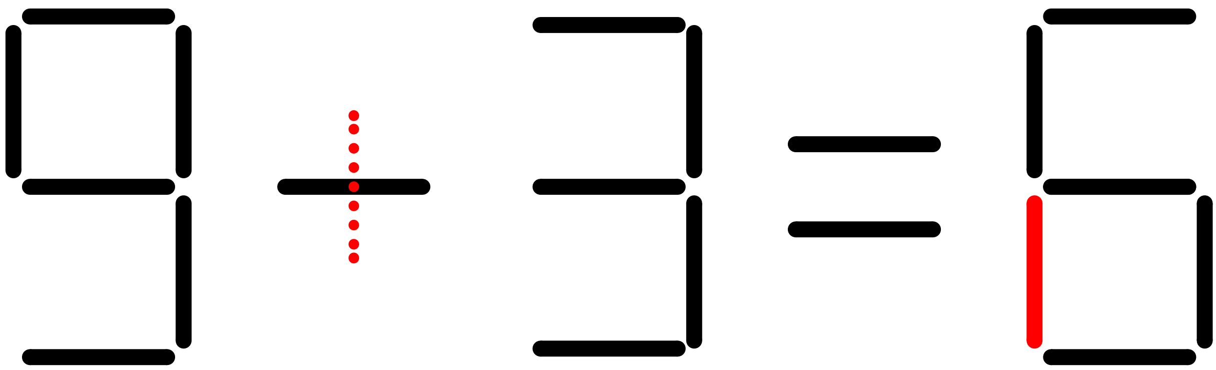
Solution 1 (3 + 3 = 6)



Solution 2 (8 - 3 = 5)

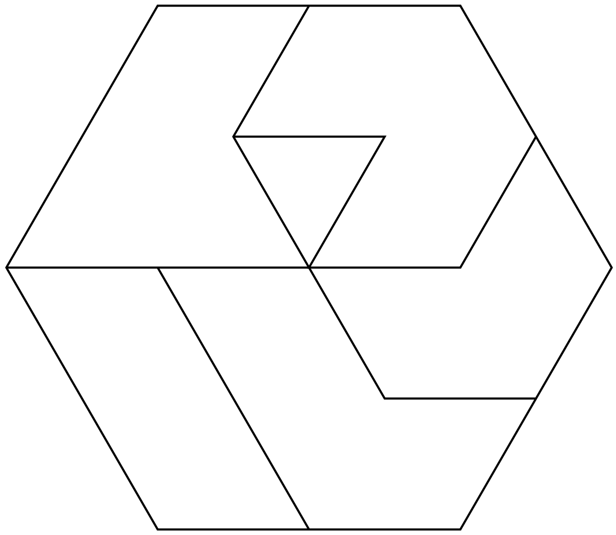


Solution 3 (9 - 3 = 6)

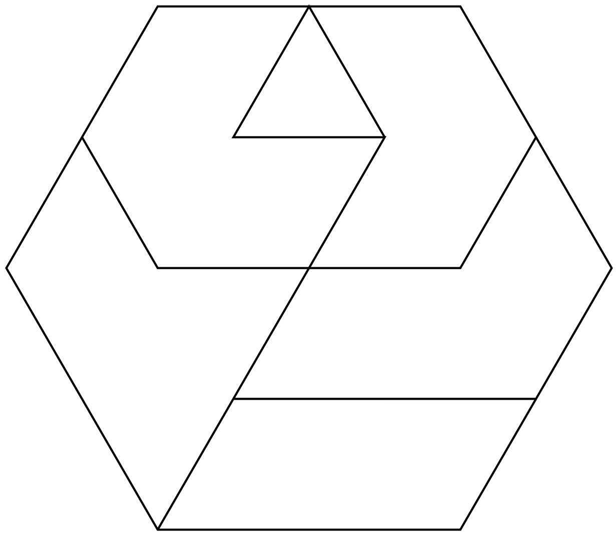


Solution du défi 24

Solution 1



Solution 2



Solution du défi 25

Solution 1

(La somme est 23.)

1	8	2
5	9	4
6	3	7

Solution 2

(La somme est 24.)

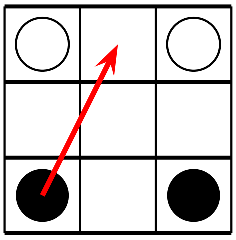
1	6	2
8	9	7
4	3	5

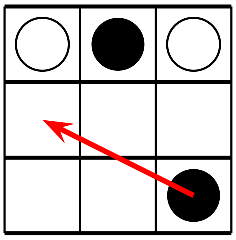
Solution du défi 26

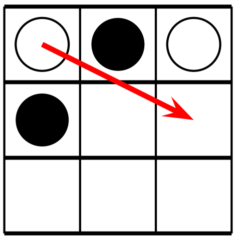
2		6
7		1
3	4	5

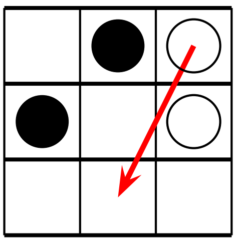
Solution du défi 27

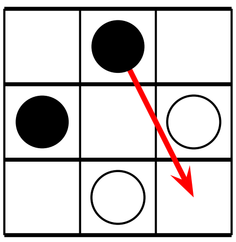
Solution en 16 déplacements

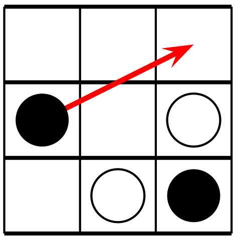

(0)

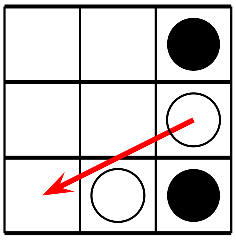

(1)

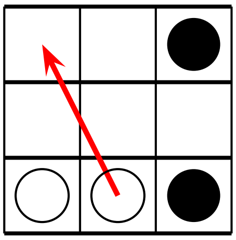

(2)

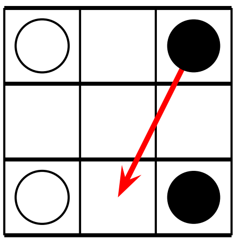

(3)

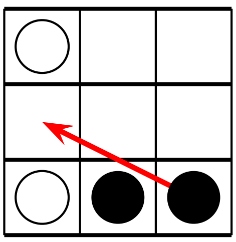

(4)

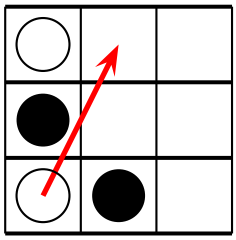

(5)

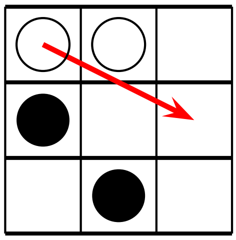

(6)

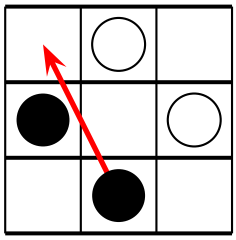

(7)

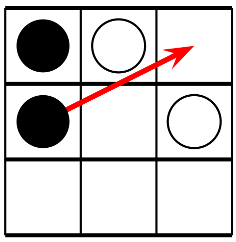

(8)

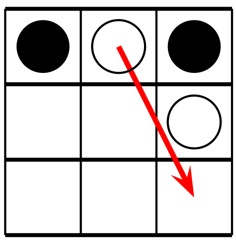

(9)

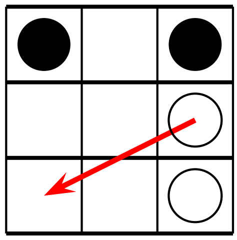

(10)

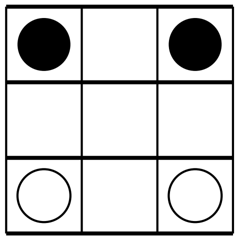

(11)


(12)

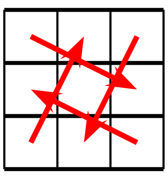

(13)

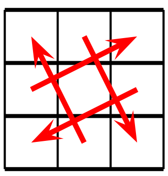

(14)

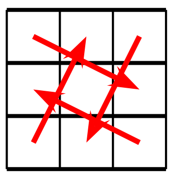

(15)

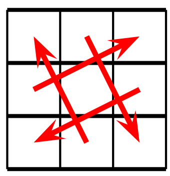

(16)

En résumé :


(0) $\rightarrow$ (3)


(4) $\rightarrow$ (7)


(8) $\rightarrow$ (11)


(12) $\rightarrow$ (15)

Solution du défi 28

Solution en 16 déplacements

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

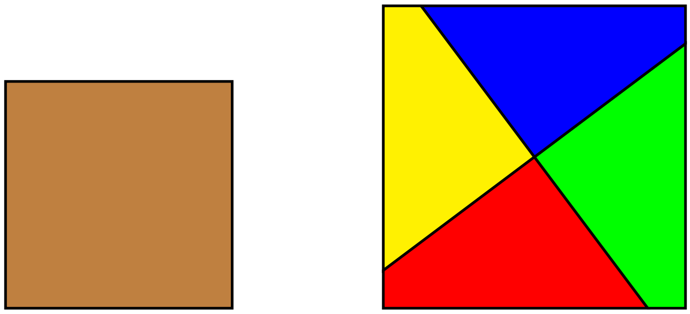
1. 3 $\longrightarrow$ 4
2. 4 $\longrightarrow$ 9
3. 11 $\longrightarrow$ 4
4. 4 $\longrightarrow$ 3
5. 1 $\longrightarrow$ 6
6. 6 $\longrightarrow$ 11
7. 12 $\longrightarrow$ 7
8. 7 $\longrightarrow$ 6
9. 6 $\longrightarrow$ 1
10. 2 $\longrightarrow$ 7
11. 7 $\longrightarrow$ 12
12. 9 $\longrightarrow$ 4
13. 10 $\longrightarrow$ 9
14. 9 $\longrightarrow$ 2
15. 4 $\longrightarrow$ 9
16. 9 $\longrightarrow$ 10

Solution du défi 29

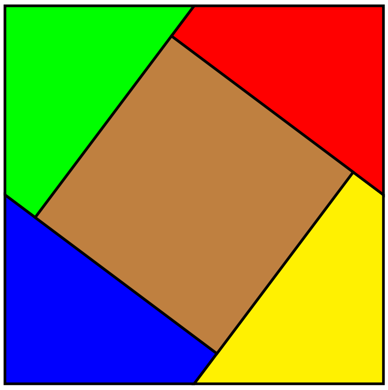
Dans ce tableau, le nombre **1** est écrit **2** fois ; le nombre **2** est écrit **3** fois ; le nombre **3** est écrit **2** fois ; le nombre **4** est écrit **1** fois.

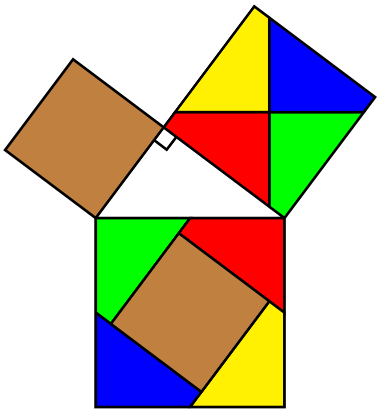
Solution du défi 30

Deux carrés :



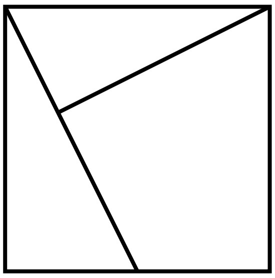
Un carré :



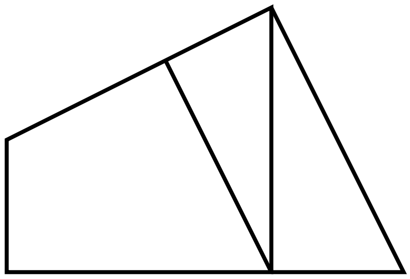


Solution du défi 31

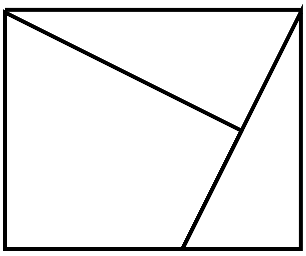
Carré :



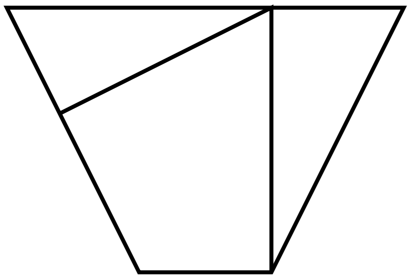
Quadrilatère non parallélogramme :



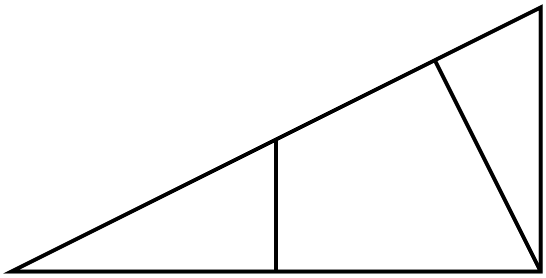
Rectangle :



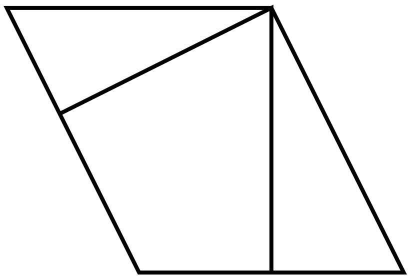
Trapèze isocèle :



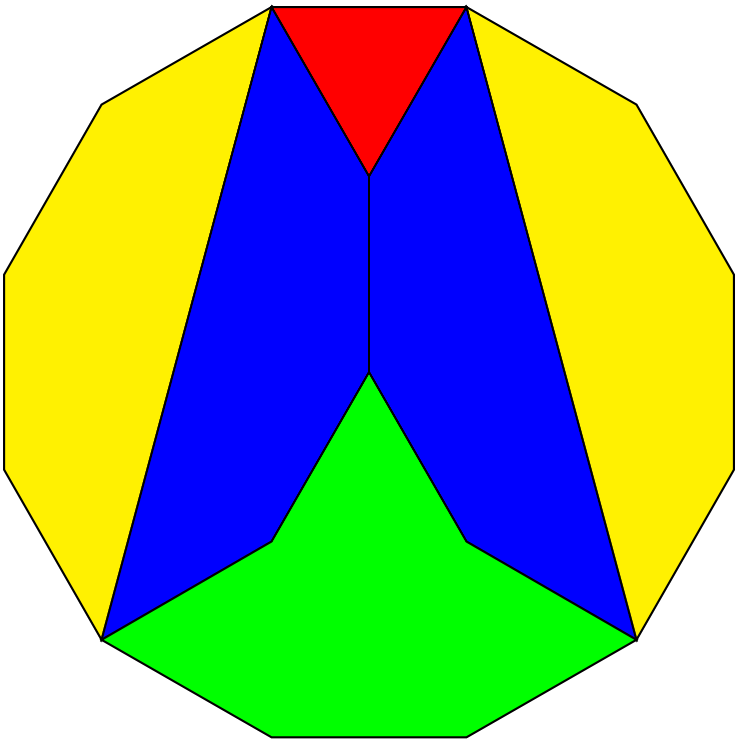
Triangle rectangle :

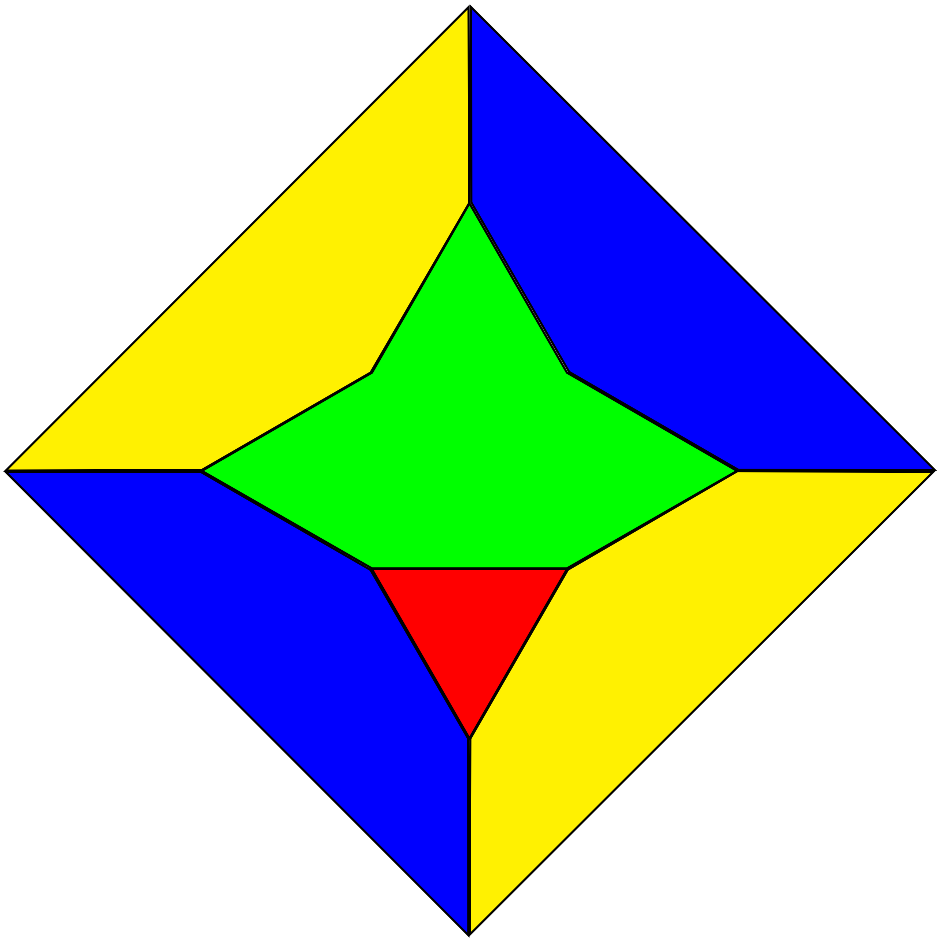


Parallélogramme (non rectangle) :



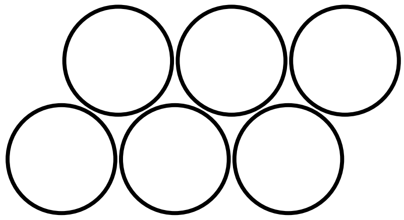
Solution du défi 32



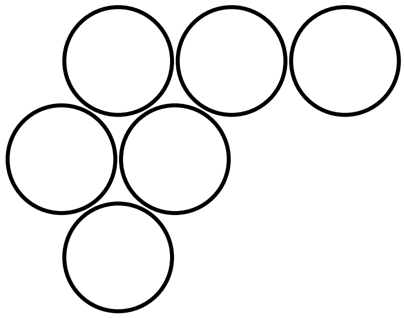


Solution du défi 33

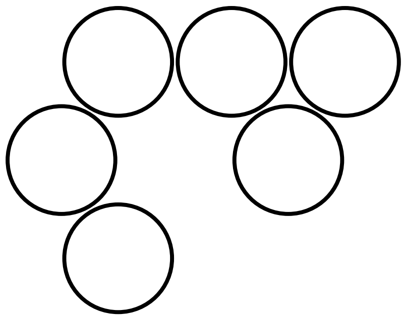
Solutions en 3 déplacements



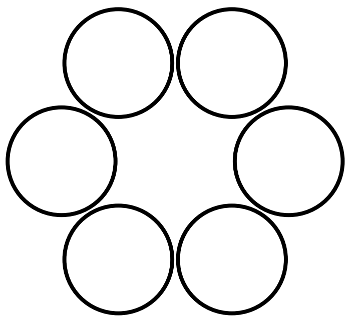
(1)



(2)



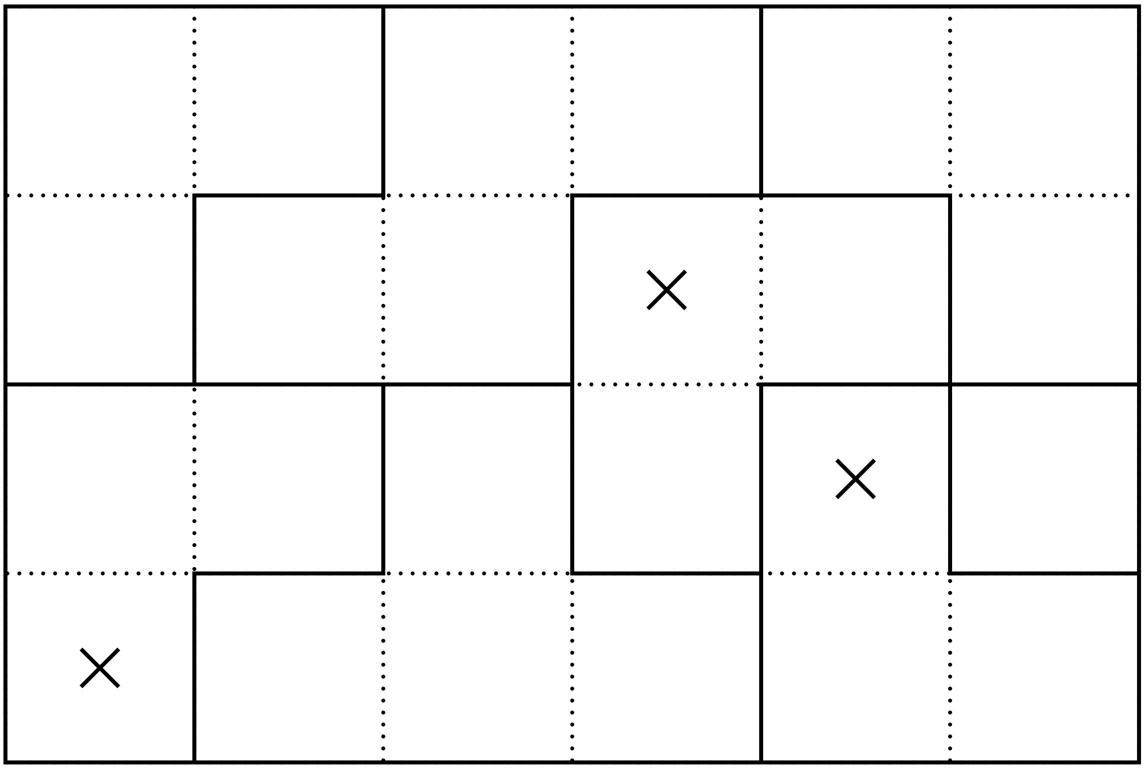
(3)



Il y a 23 autres façons de résoudre ce défi !

Solution du défi 34

Une des solutions :

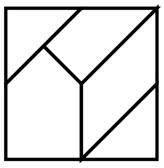


Pour trouver d'autres solutions, on peut penser à la position des trois croix :

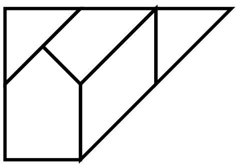
1. elles sont alignées sur une droite parallèle à un des côtés du rectangle ;
2. elles sont alignées sur une droite non parallèle à un des côtés du rectangle ;
3. elles forment un triangle rectangle dont les côtés peuvent être parallèles à un des côtés du rectangle ;
4. elles forment un triangle rectangle dont aucun côté n'est parallèle à un des côtés du rectangle ;
5. elles forment un triangle isocèle dont un côté peut être parallèle à un des côtés du rectangle ;
6. elles forment un triangle isocèle dont aucun côté n'est parallèle à un des côtés du rectangle.

Solution du défi 35

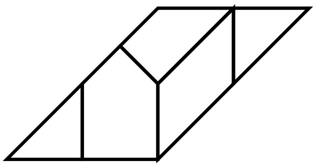
Carré :



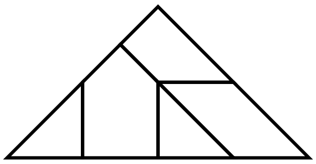
Trapèze rectangle :



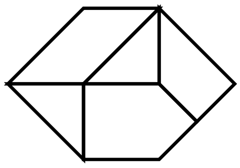
Parallélogramme non carré :



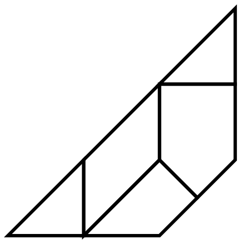
Triangle rectangle isocèle :



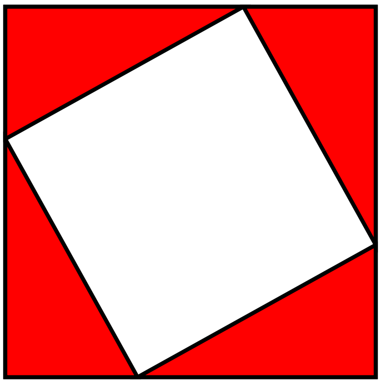
Hexagone (non régulier) :



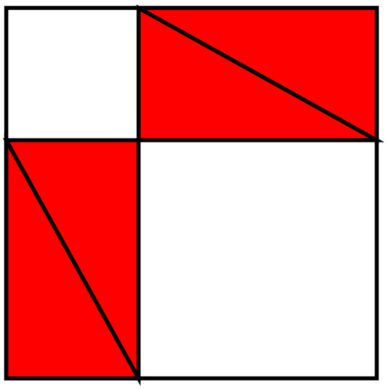
Trapèze isocèle :



Solution du défi 36
Un carré :



Deux carrés :



Prolongement

a et b et c désignent respectivement les longueurs des deux côtés de l'angle droit et de l'hypoténuse. Il apparaît rapidement les deux résultats suivants.

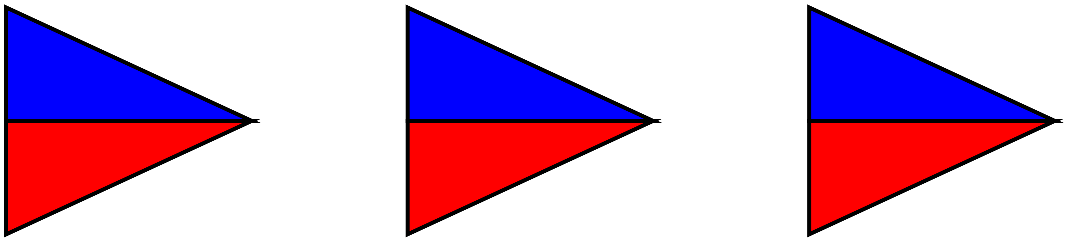
- Chacun des quatre triangles rectangles a pour aire $a\,b/2$. La somme des aires des quatre triangles est donc $2\,a\,b$.
- L'aire du grand carré « blanc » est c^2 et la somme des deux carrés « blancs », $a^2 + b^2$. L'aire du carré initial est $(a + b)^2$.

Cela traduit aussi :

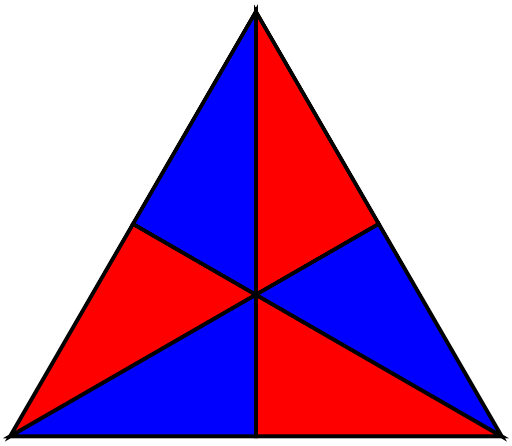
- $a^2 + b^2 = c^2$ (c'est le théorème de Pythagore)
- $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ (c'est une identité remarquable)

Solution du défi 37

Trois triangles équilatéraux :

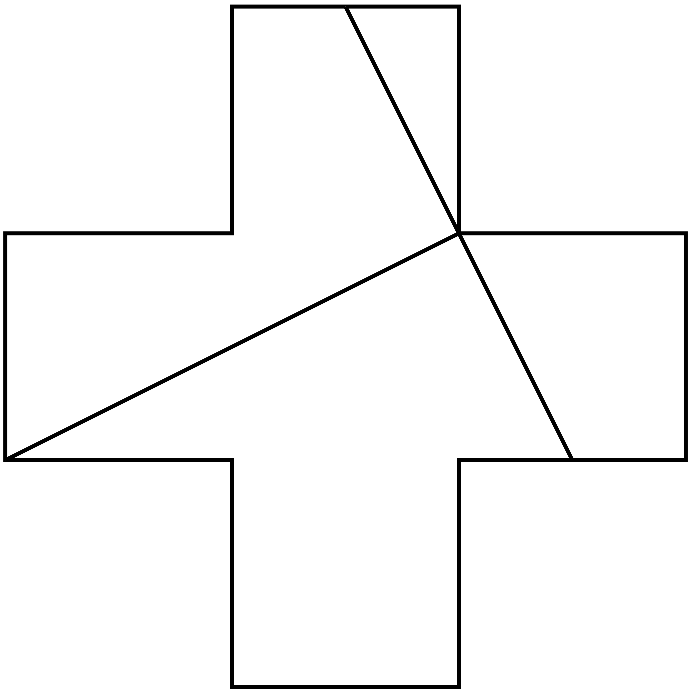


Un triangle équilatéral :

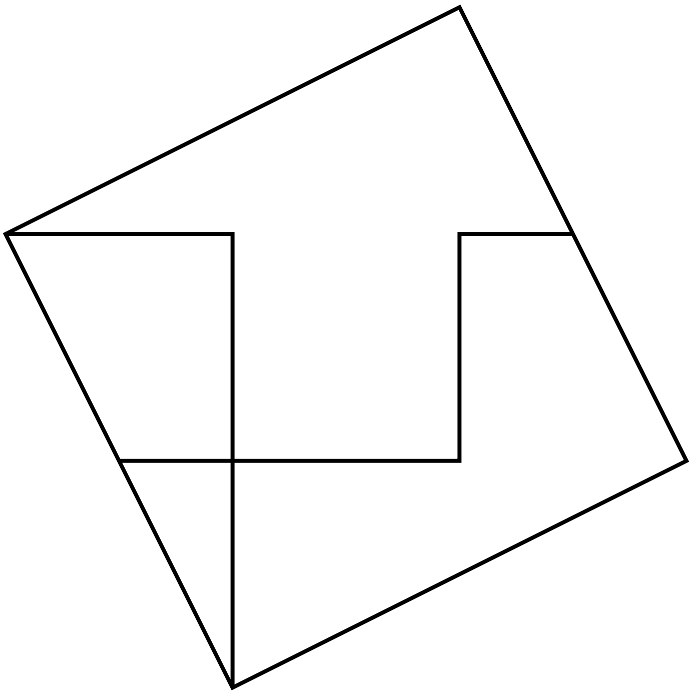


Solution du défi 38

Une croix :



Un carré :



Solution du défi 39
En plaçant sur la première ligne les lettres A, B, C et D dans cet ordre, il y a deux solutions :

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Toute grille équivalente à l'une de ces deux grilles est solution.

Complément

Recherchons toutes les solutions de manière exhaustive.

1	2	3	4

Pour cela, on va chercher à placer les jetons 1, 2, 3 et 4 dans la grille ci-contre :

Dans la ligne $ABCD$, 1 ne peut être ni en A (alignement vertical) ni en B (alignement diagonal). Donc 1 doit être en C ou en D.

1. Premier cas : 1 est en C.

   Intéressons-nous à la ligne $IJKL$. 1 ne peut pas être ni en I (alignement vertical) ni en K ni en L (alignement diagonal). Donc 1 est en J.

   Dans la ligne $EFGH$, 1 est donc en H.

   Dans la ligne $ABCD$, 2 ne peut pas être en B : il peut être en A ou en D.

   (a) Premier sous-cas : 2 est en A.

   Dans la ligne $ABCD$, 4 ne peut pas être en D : il est donc en B. Donc 3 est en D.

   Dans la colonne $2BFJ$, 3 est donc en F.

   Dans la colonne $1EAI$, 3 ne peut être ni en E (alignement horizontal) ni en I (alignement diagonal). 3 ne peut donc pas être placé : l'hypothèse « 2 est en A » est donc fausse.

   (b) Second sous-cas : 2 est en D.

   Dans la colonne $ADHL$, 3 est donc en L.

   Dans la ligne $IJKL$, 4 ne peut pas être en I (alignement diagonal) : 4 est donc en en K. Donc 2 est en I.

   Dans la colonne $3CGK$, 2 est donc en G.

   Dans la ligne $EFGH$, 4 ne peut pas être en F (alignement diagonal) : 4 est donc en en E. Donc 3 est en F.

   Dans la ligne $ABCD$, 3 est donc en A et 4, en B.

   Ce qui donne le premier carré solution :

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

2. Second cas : 1 est en D.

   Intéressons-nous à la ligne $EFGH$. 1 ne peut pas être ni en E ni en H (alignement vertical) ni en G (alignement diagonal). Donc 1 est en F.

   Dans la ligne $IJKL$, 1 est donc en K.

   (a) Premier sous-cas : 2 est en A.

   Dans la ligne $ABCD$, 4 ne peut pas être en B (alignement vertical). Donc 4 est en C. Ce qui est impossible (alignement diagonal). 4 ne peut donc pas être placé : l'hypothèse « 2 est en A » est donc fausse.

   (b) Second sous-cas : 2 est en C.

   Dans la colonne $3CGK$, 4 est donc en G.

   Dans la diagonale $4CFI$, 3 est donc en I.

   Dans la ligne $IJKL$, 2 ne peut pas être en J (alignement vertical). Donc 2 est en L. Donc 4 est en J.

   Dans la colonne $4DHL$, 3 est donc en H.

   Dans la ligne $EFGH$, 2 est donc en E.

   Dans la ligne $ABCD$, 4 est donc en A et 3, en B.

   Ce qui donne le second carré solution :

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Solution du défi 40

On se sert du carré bilatin orthogonal d'ordre 4 solution :

A 1	B 2	C 3	D 4
C 4	D 3	A 2	B 1
D 2	C 1	B 4	A 3
B 3	A 4	D 1	C 2

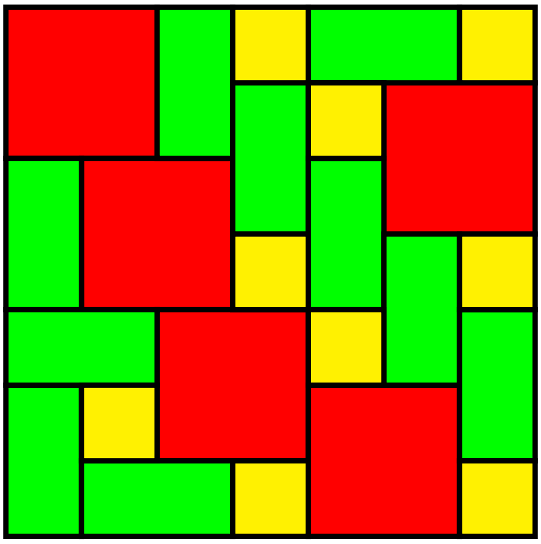
Toute grille équivalente à cette grille est solution.

On peut, par exemple, choisir :
- d'une part, $(A , B , C , D) = (As , R , D , V)$;
- d'autre part, $(1 , 2 , 3 , 4) = (\heartsuit , \spadesuit , \diamondsuit , \clubsuit)$.

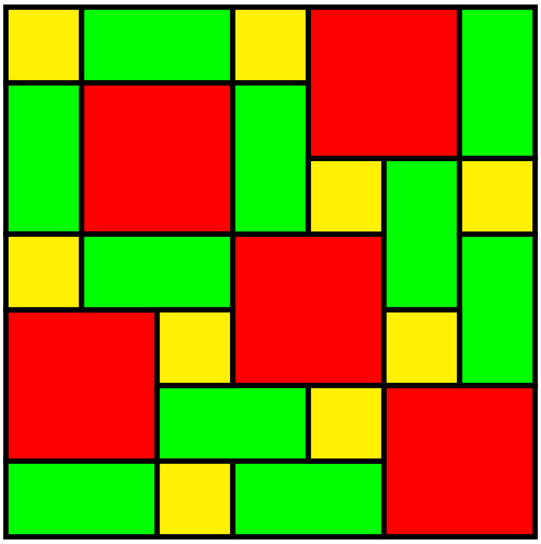
On obtient alors :

$As \heartsuit$	$R \spadesuit$	$D \diamondsuit$	$V \clubsuit$
$D \clubsuit$	$V \diamondsuit$	$As \spadesuit$	$R \heartsuit$
$V \spadesuit$	$D \heartsuit$	$R \clubsuit$	$As \diamondsuit$
$R \diamondsuit$	$As \clubsuit$	$V \heartsuit$	$D \spadesuit$

Solution du défi 41
Solution 1

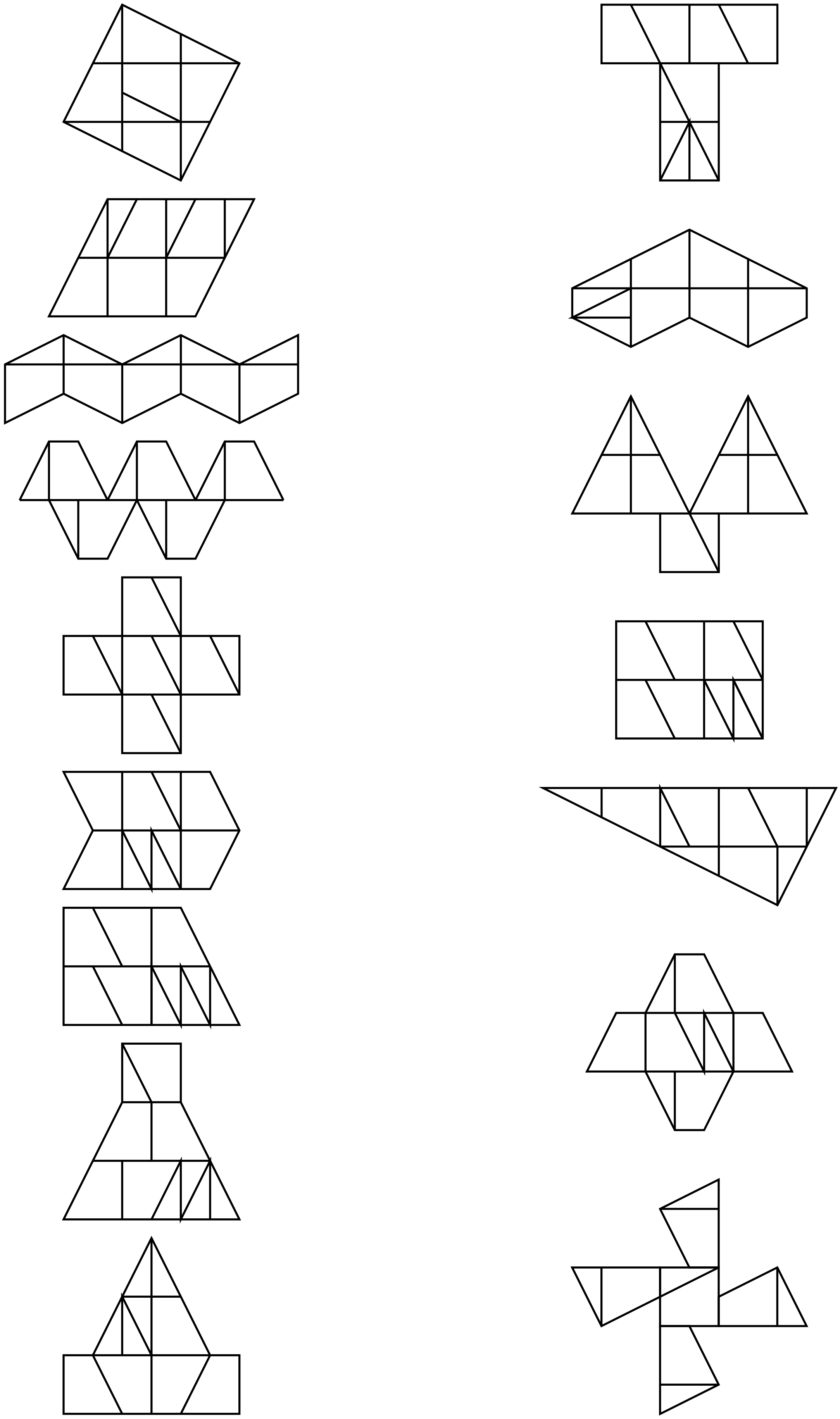


Solution 2

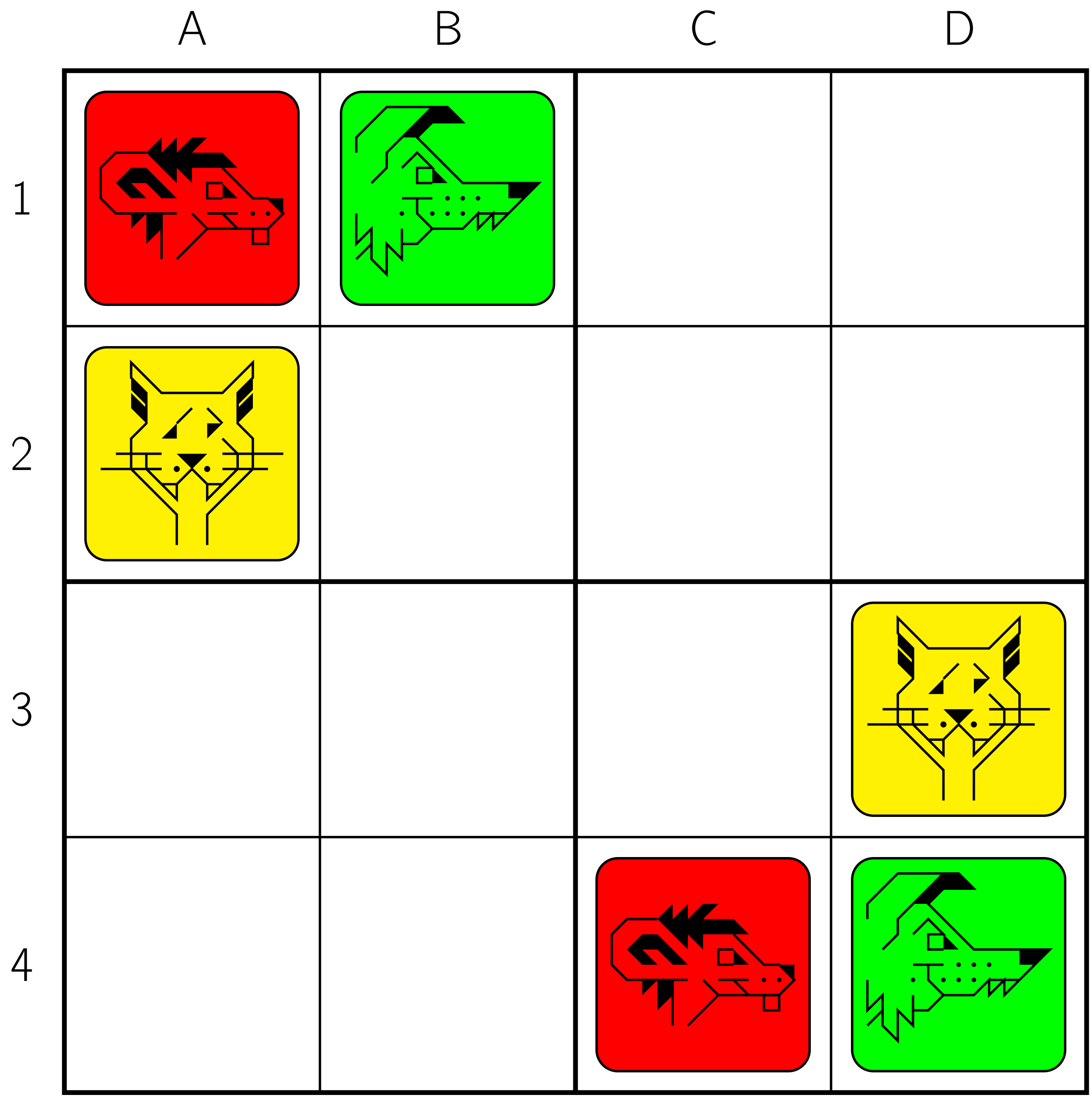


(Cette solution admet un axe de symétrie.)

Solution du défi 42



Solution du défi 43



Je dois avoir un chien dans le carré « en haut à gauche » : je place un chien en B2.
De même, je place un chien en C3.

Je dois placer un chien dans le carré « en bas à gauche ». Mais je ne peux pas le placer dans la colonne B (à cause du chien en B2) ni dans la ligne 3 (à cause du chien en C3). Il me reste une seule possibilité : je place le chien en A4.
De même, je place un chien en D1.

Je complète la colonne A en mettant un renard en A3 et je complète la ligne 1 en mettant un chat en C1.

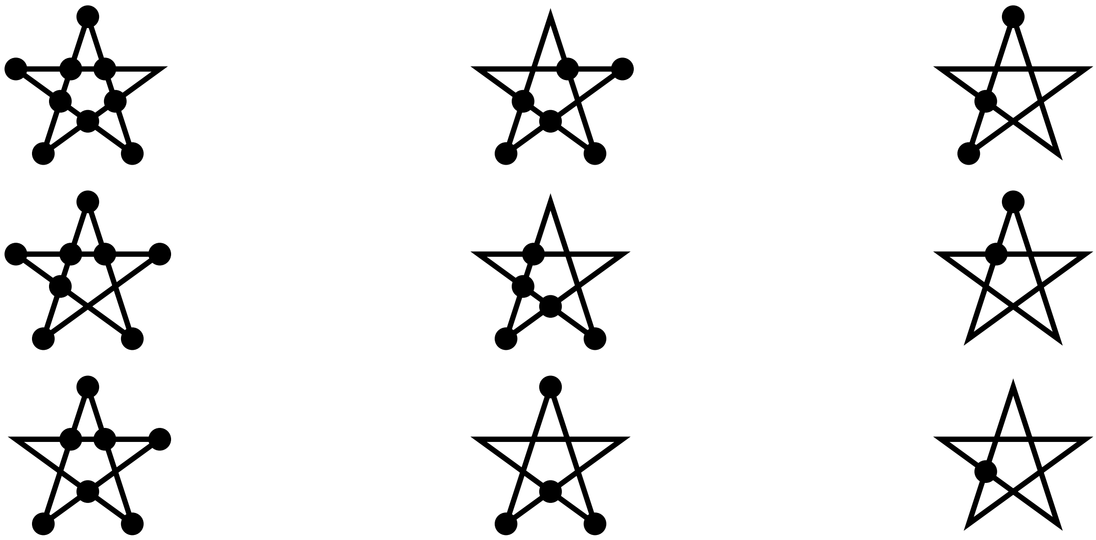
Je complète la ligne 3 en plaçant une souris en B3.
Je complète la ligne 4 en plaçant un chat en B4.
Je complète la colonne C en plaçant un renard en C2.
Je complète la colonne D en plaçant une souris en D2.

Et voilà !

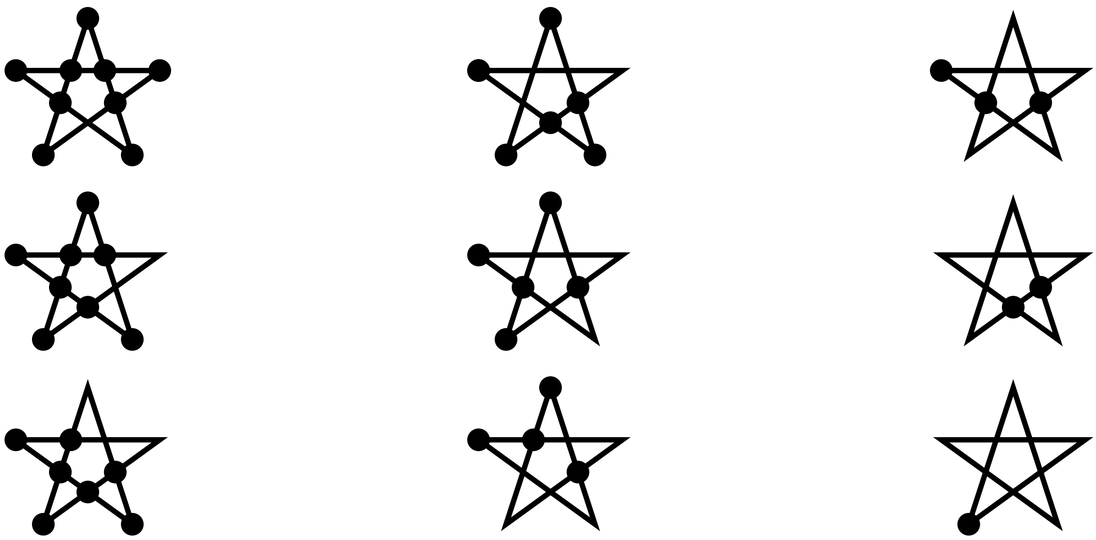
Solution du défi 44

- Aux rotations et aux symétries près, il n'y a que 2 configurations de départ.
- Toute partie victorieuse se fait en 8 sauts.
- Quand le pion retiré se situe dans un angle rentrant, il y a 8 solutions.

Première solution

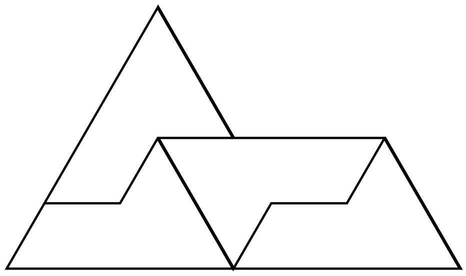


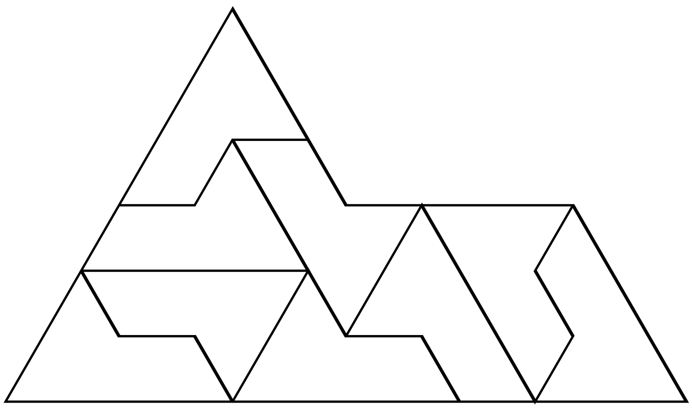
Seconde solution

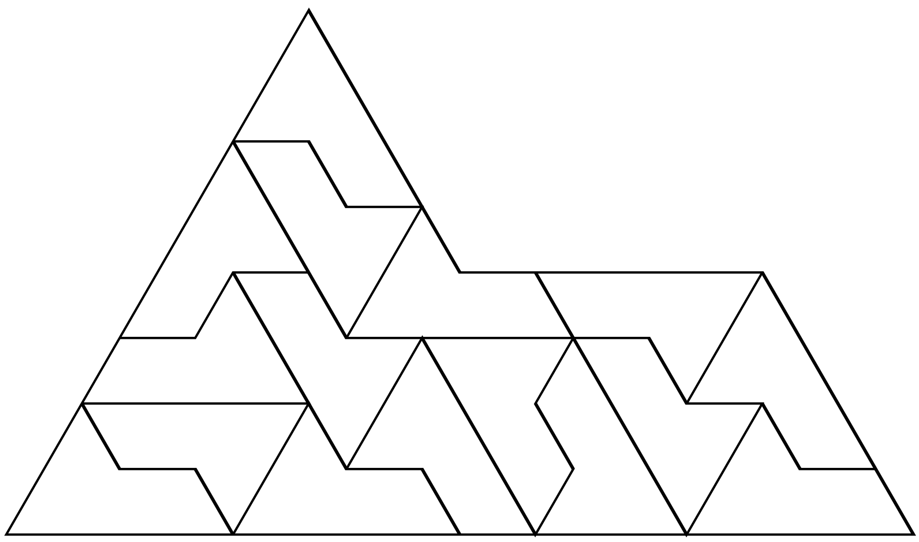


Solution du défi 45

Quelques solutions



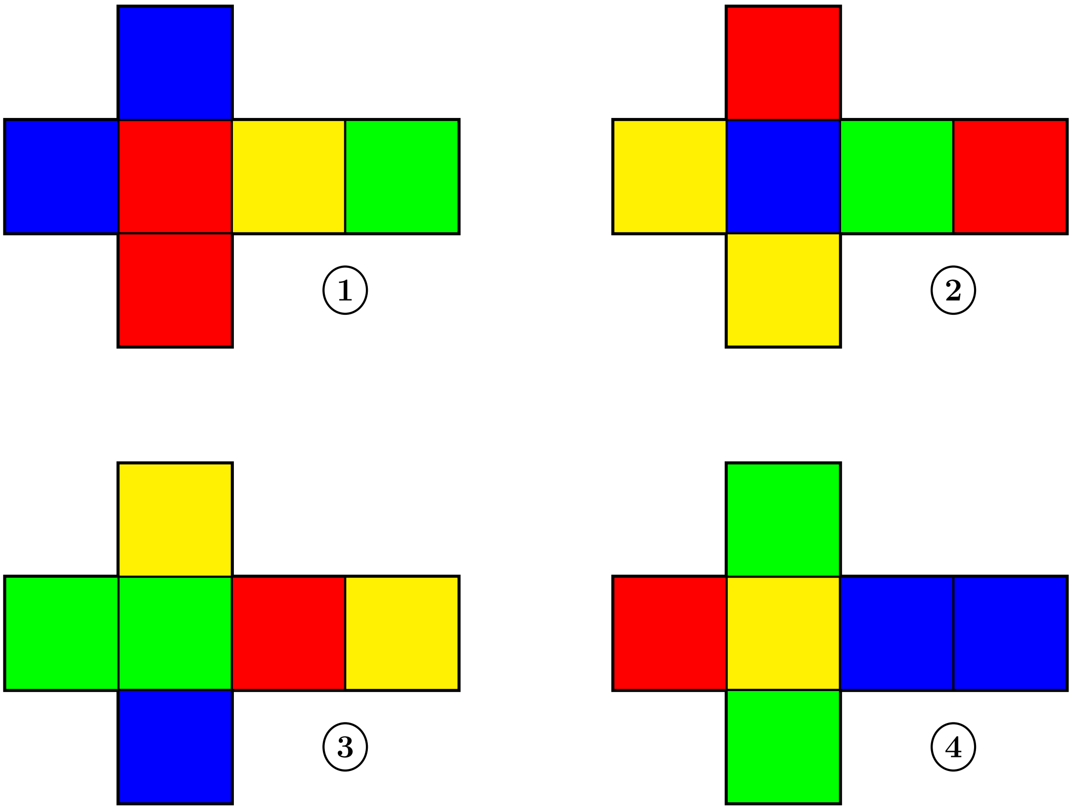


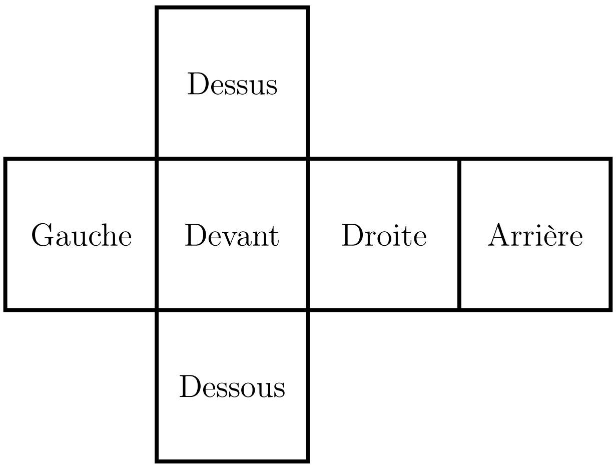


Solution du défi 46

3	4	6	72
1	2	5	30
7	8	9	504
21	64	270	

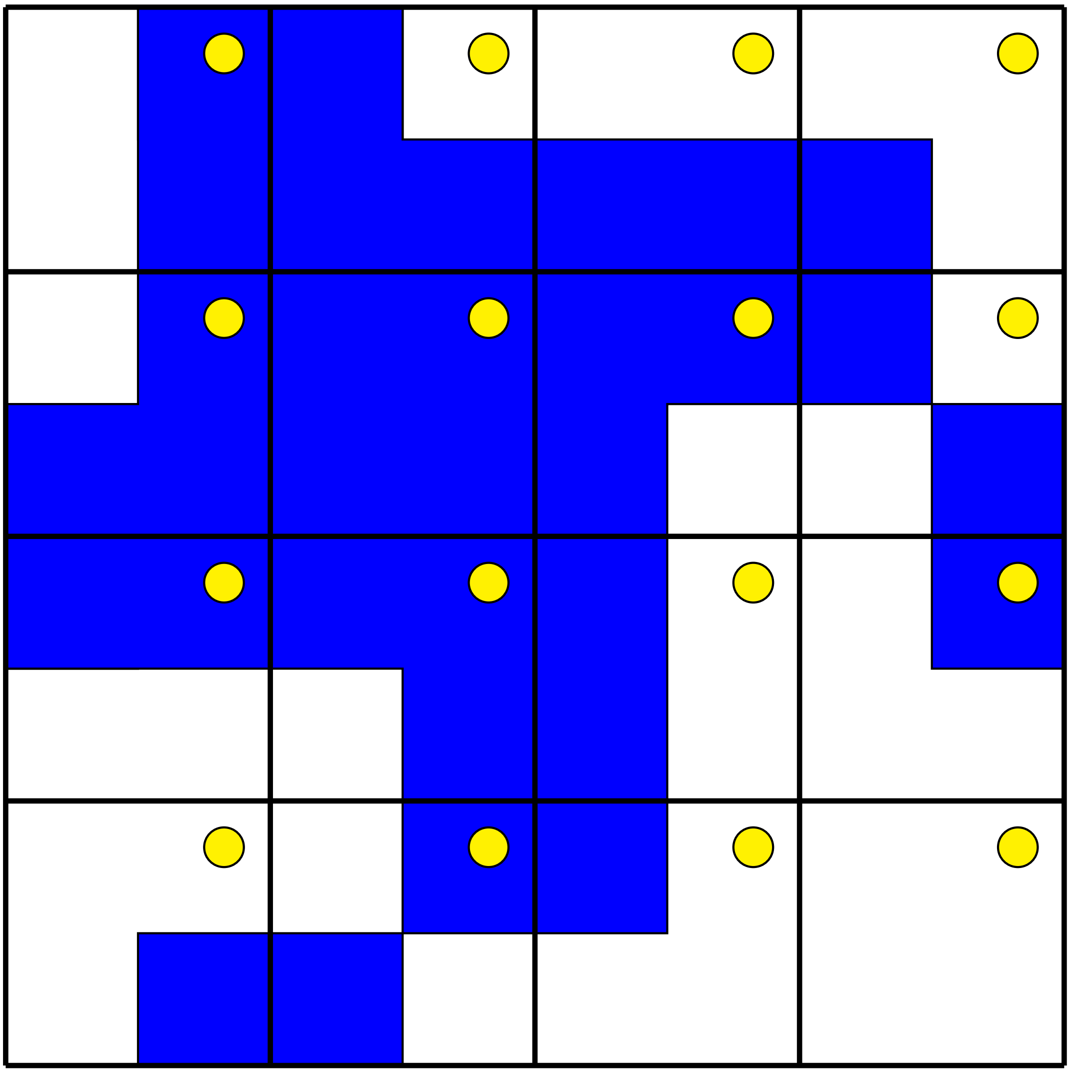
Solution du défi 47



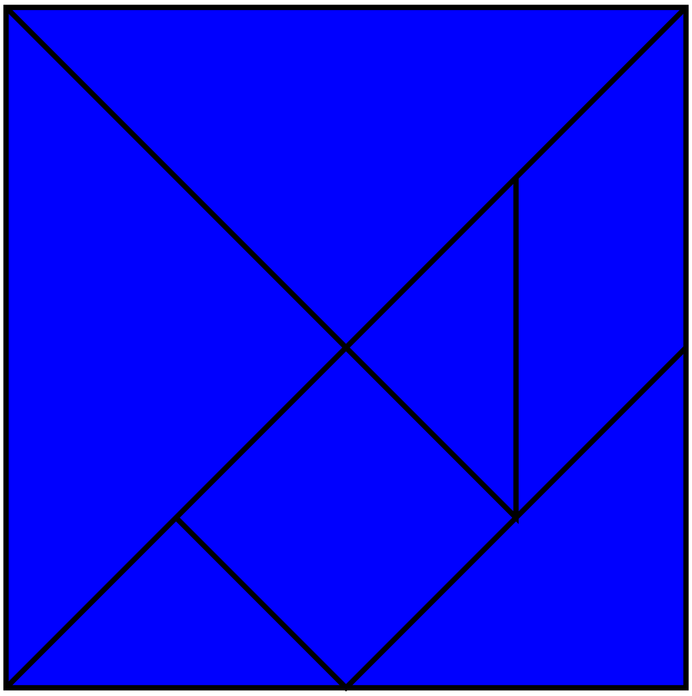


Solution du défi 48

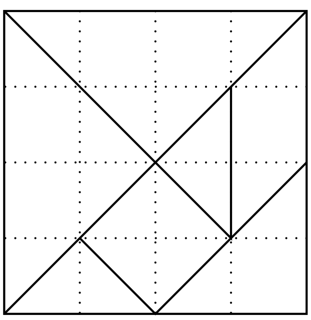
Une solution :



Solution du défi 49

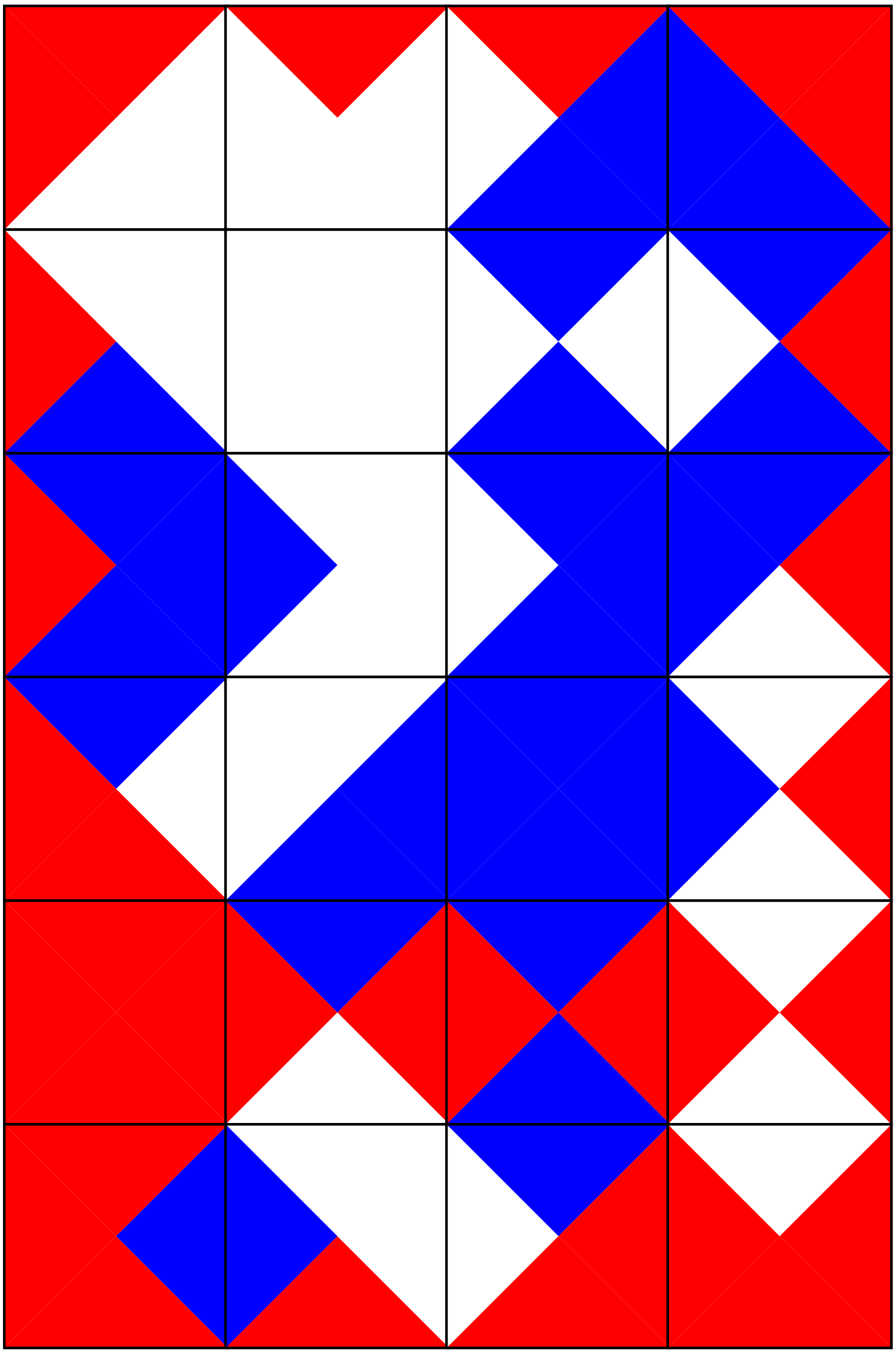


Aide pour une construction :



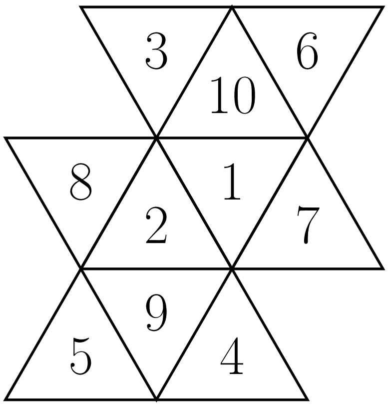
Solution du défi 50

Une solution (avec les 24 carrés)

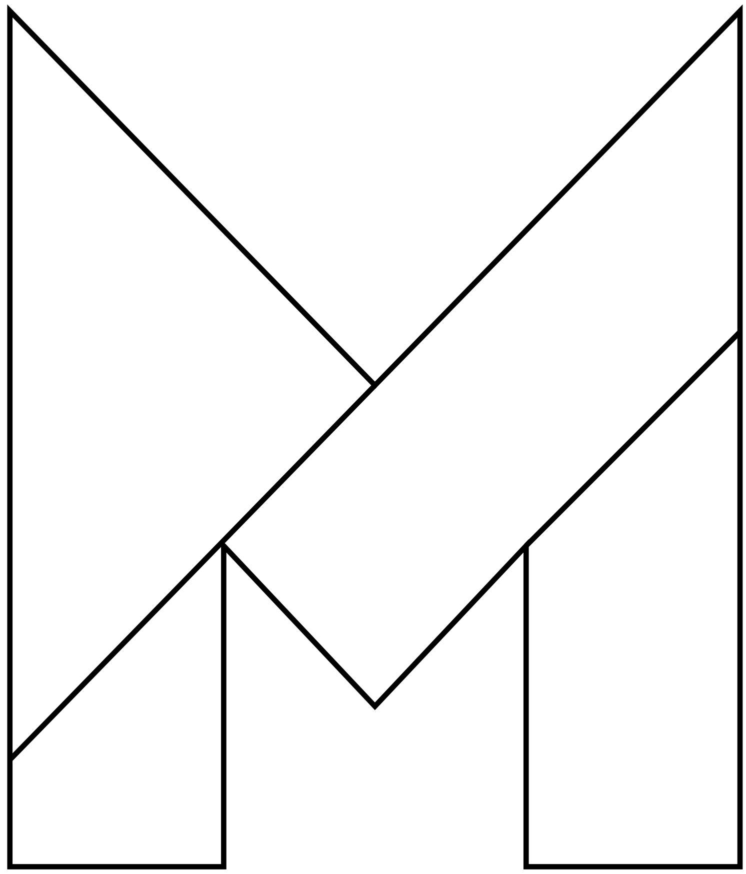


Contrainte supplémentaire : le bord du rectangle est unicolore.

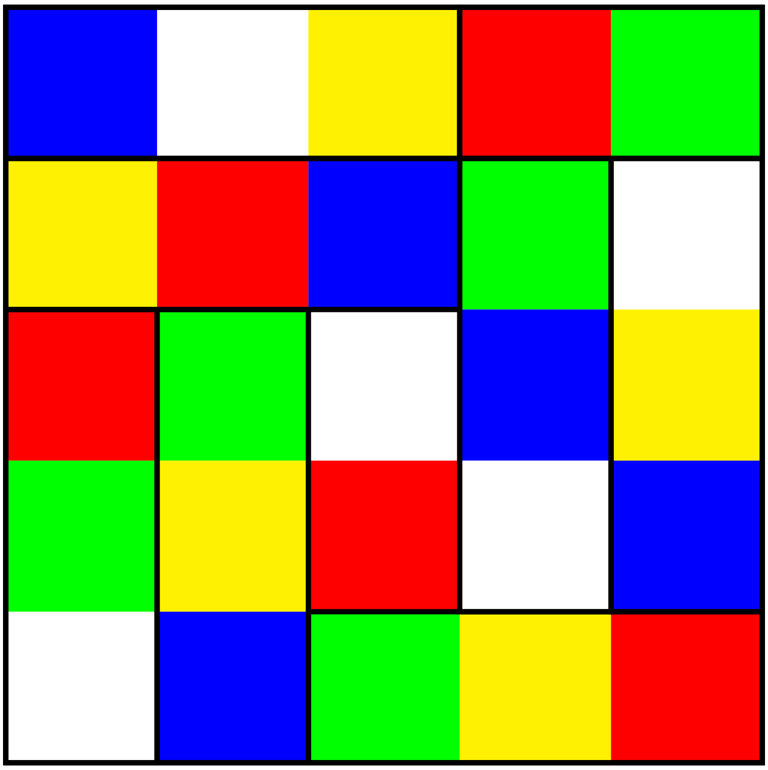
Solution du défi 51



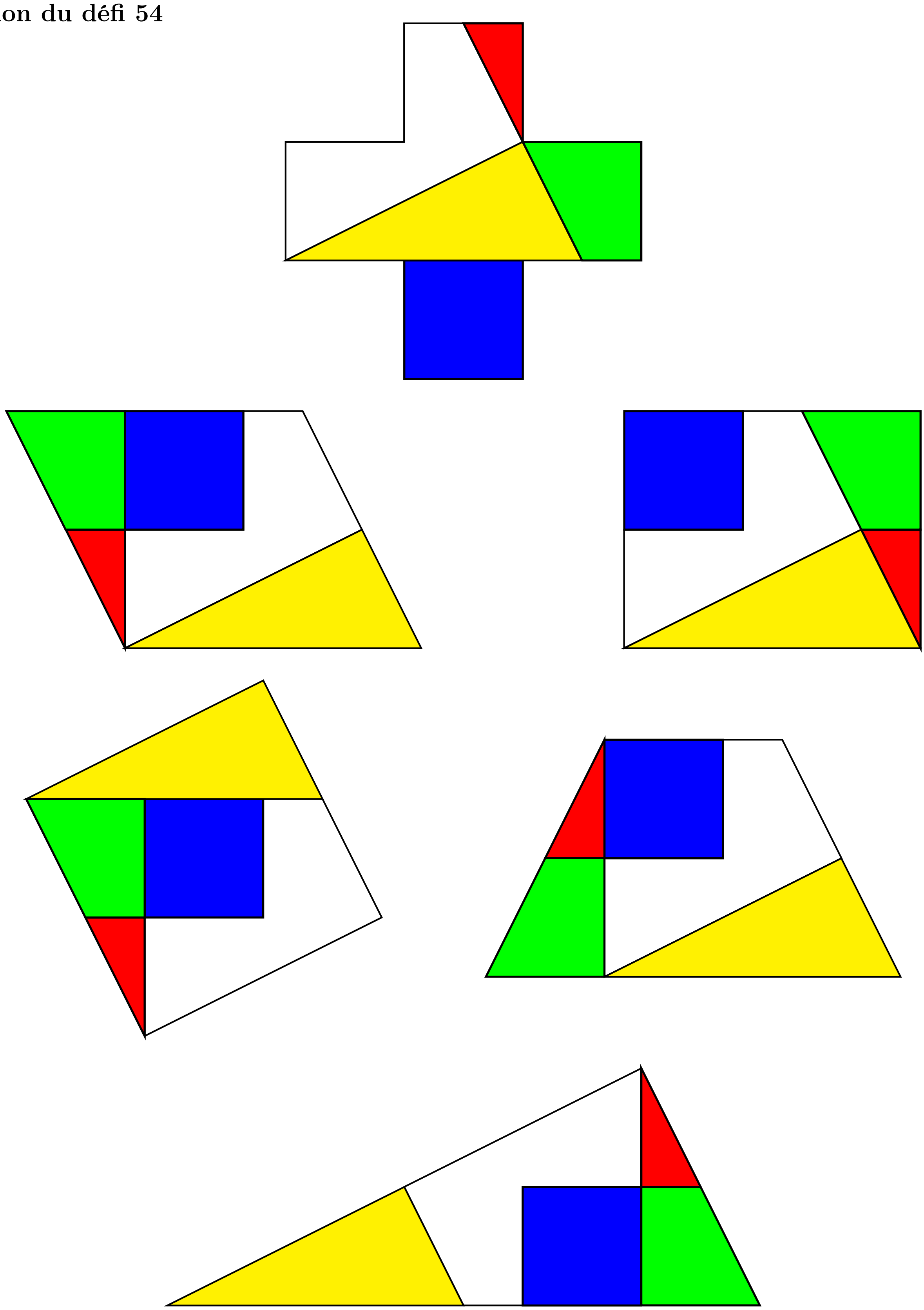
Solution du défi 52



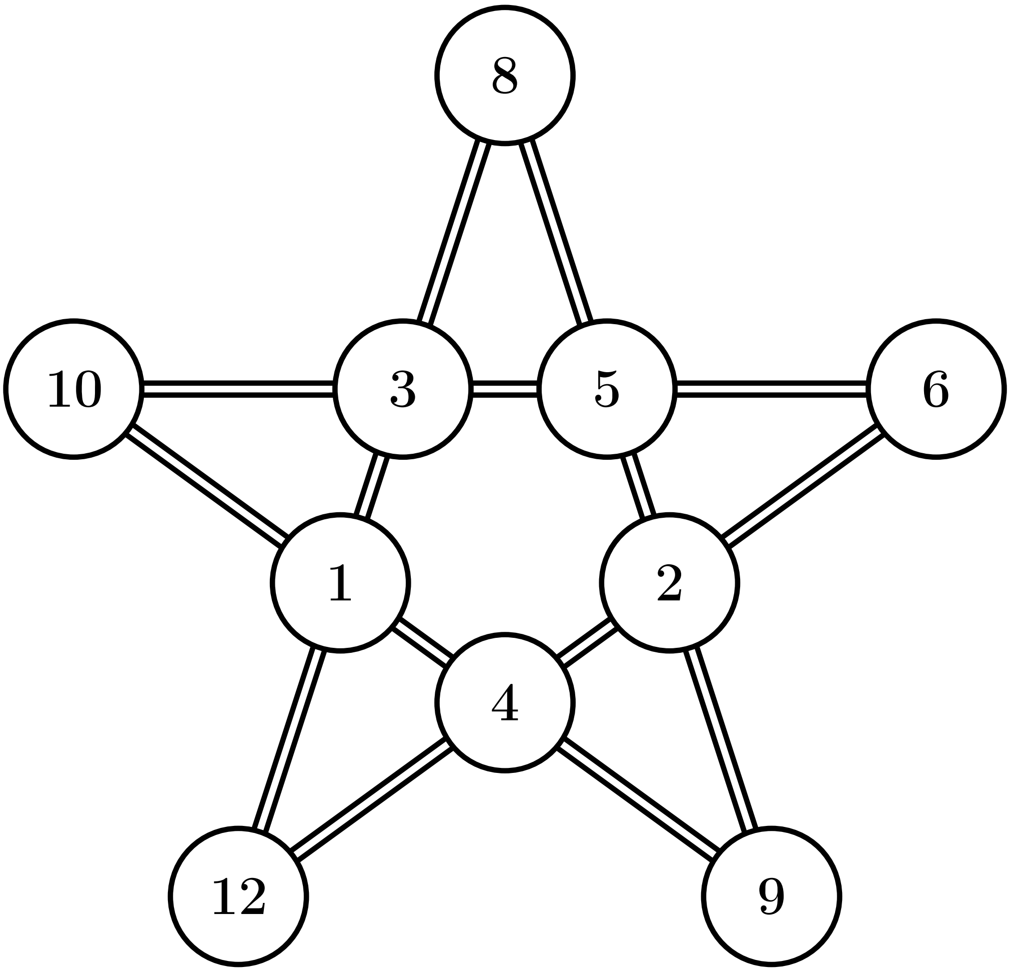
Solution du défi 53



Solution du défi 54

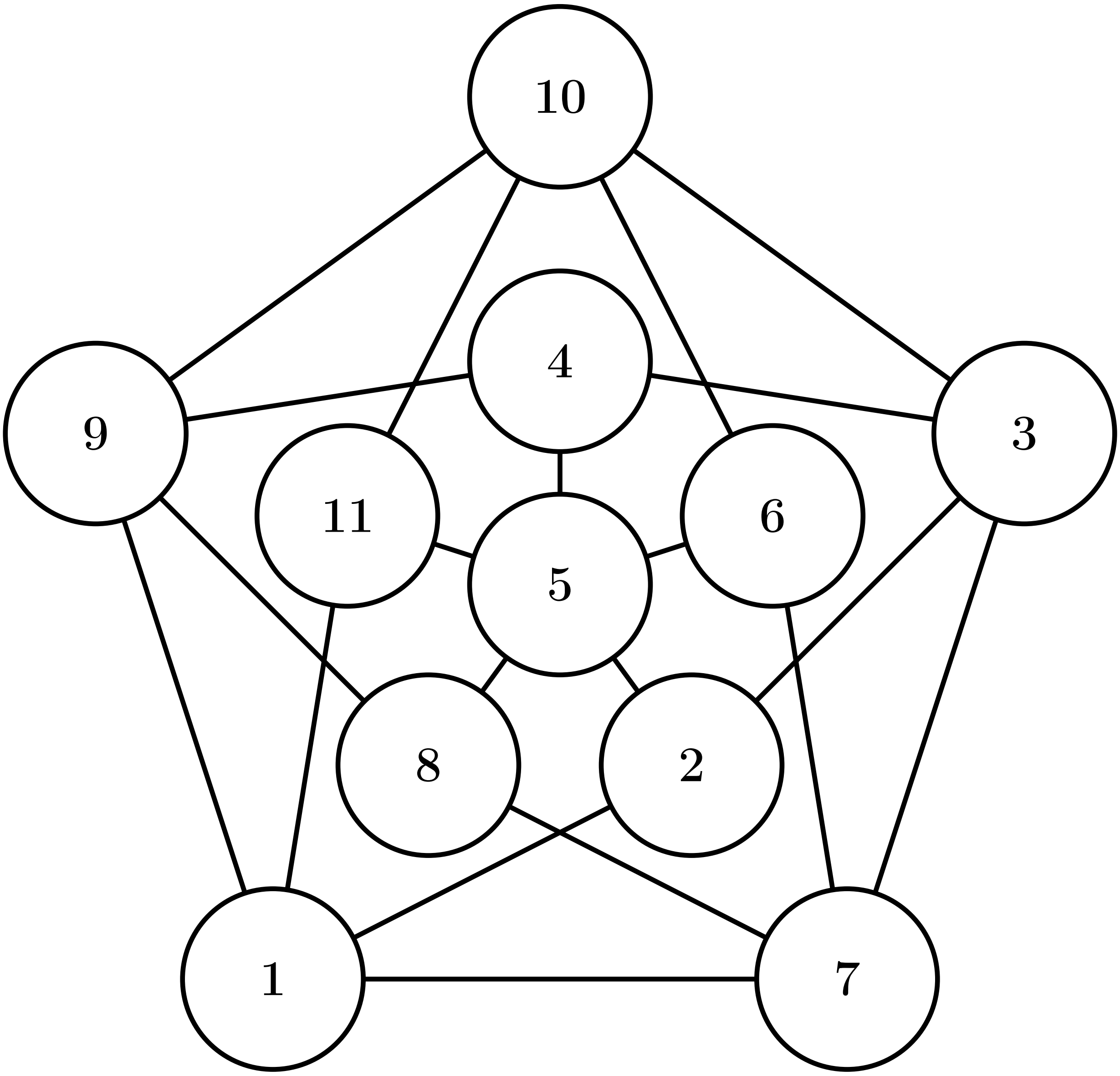


Solution du défi 55



Solution du défi 56

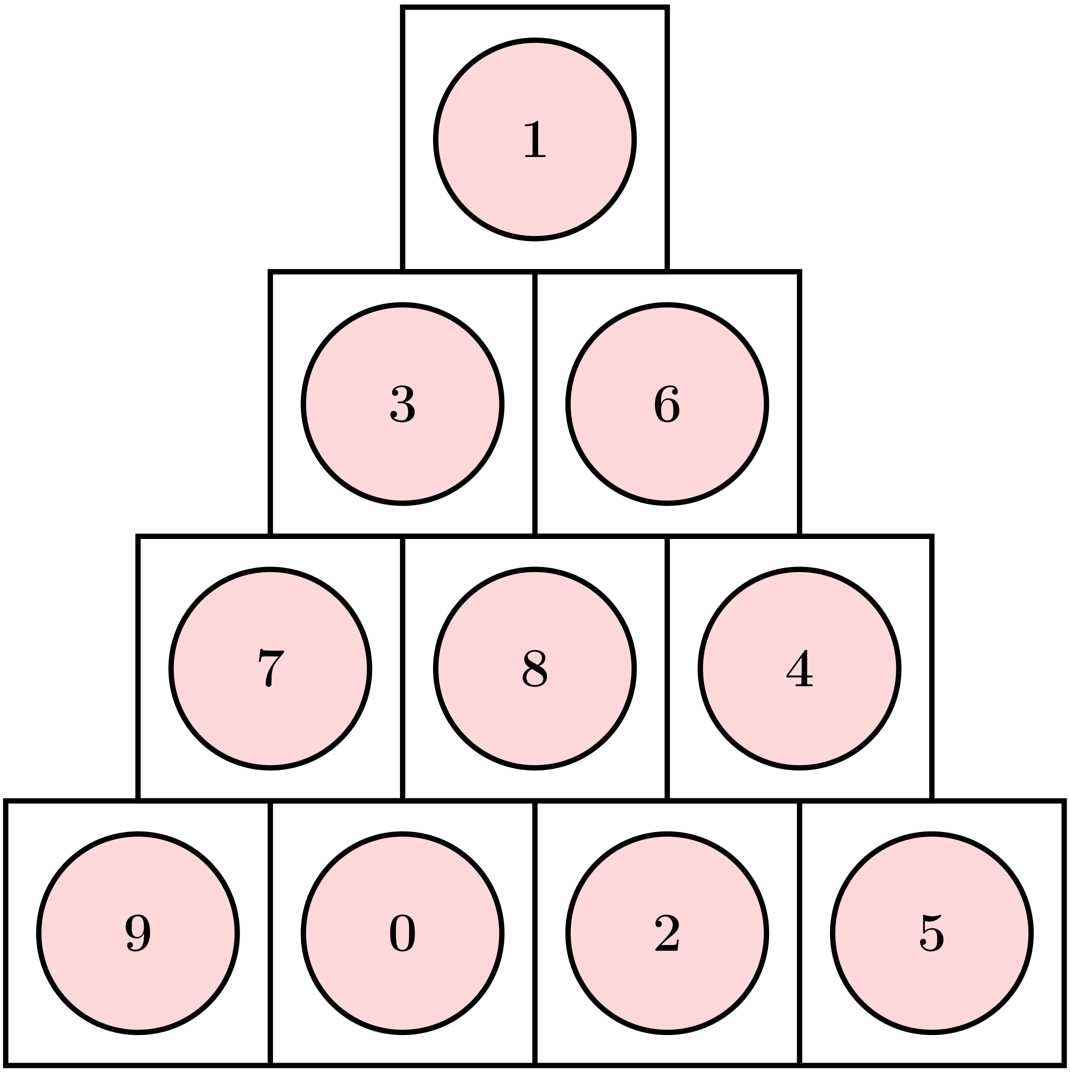
Une solution



Solution du défi 57

1	9	2
3	8	4
7	6	8

Solution du défi 58

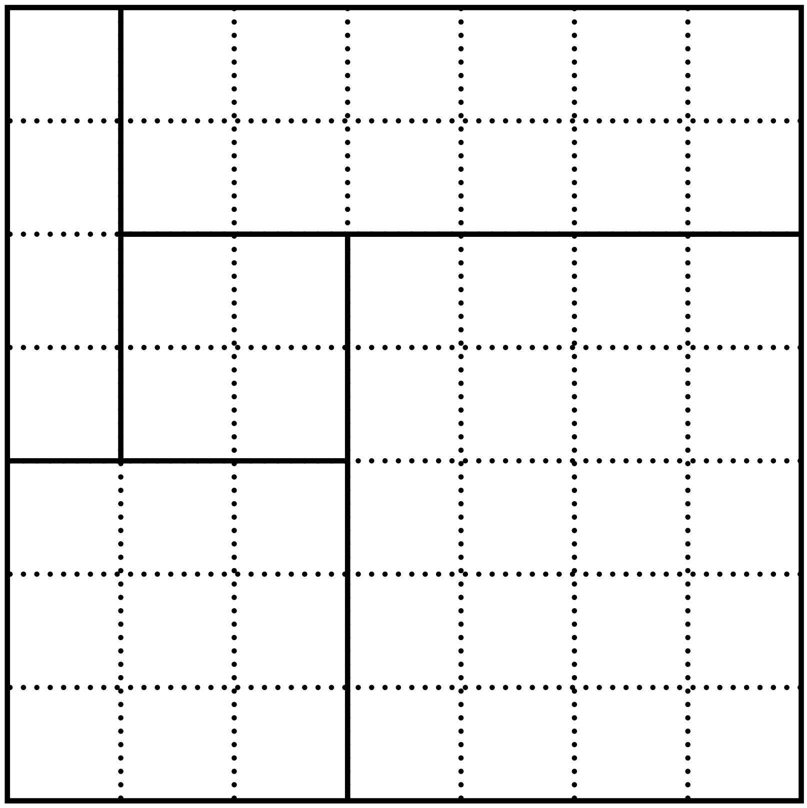


$1 = 1^2 \qquad 36 = 6^2 \qquad 784 = 28^2 \qquad 9\,025 = 95^2$

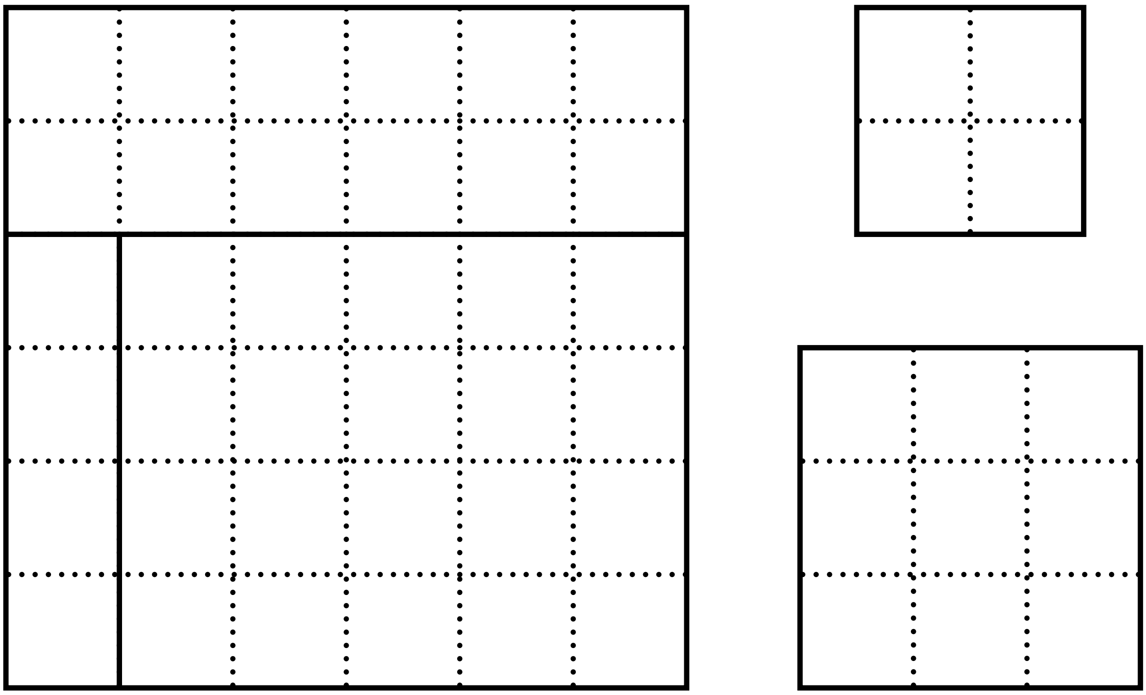
Solution du défi 59

Un carré

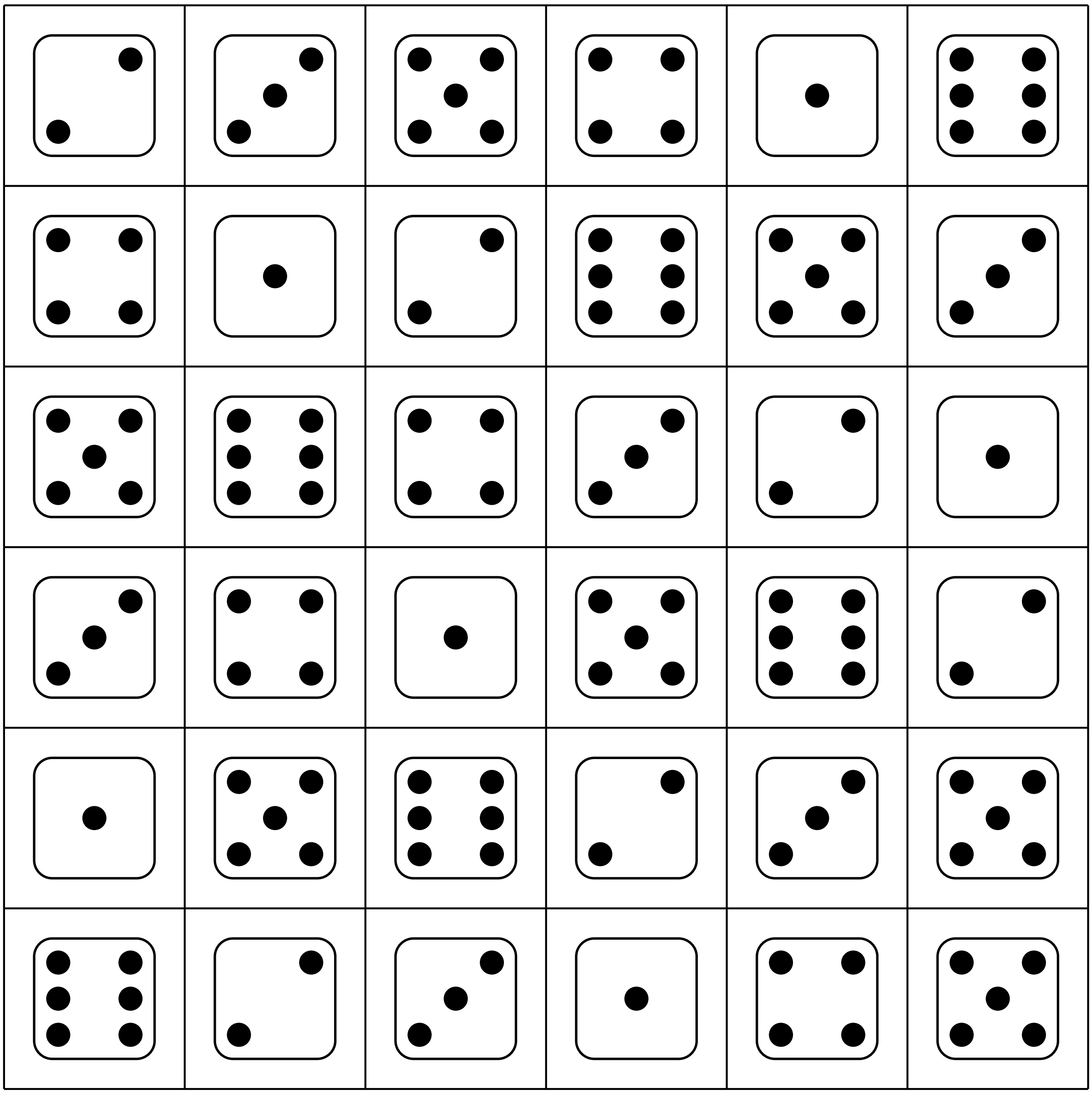
Il y a $4 \times 1 + 6 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 4 = 49$ petits carreaux. Le carré aura donc pour longueur de côté 7 carreaux.



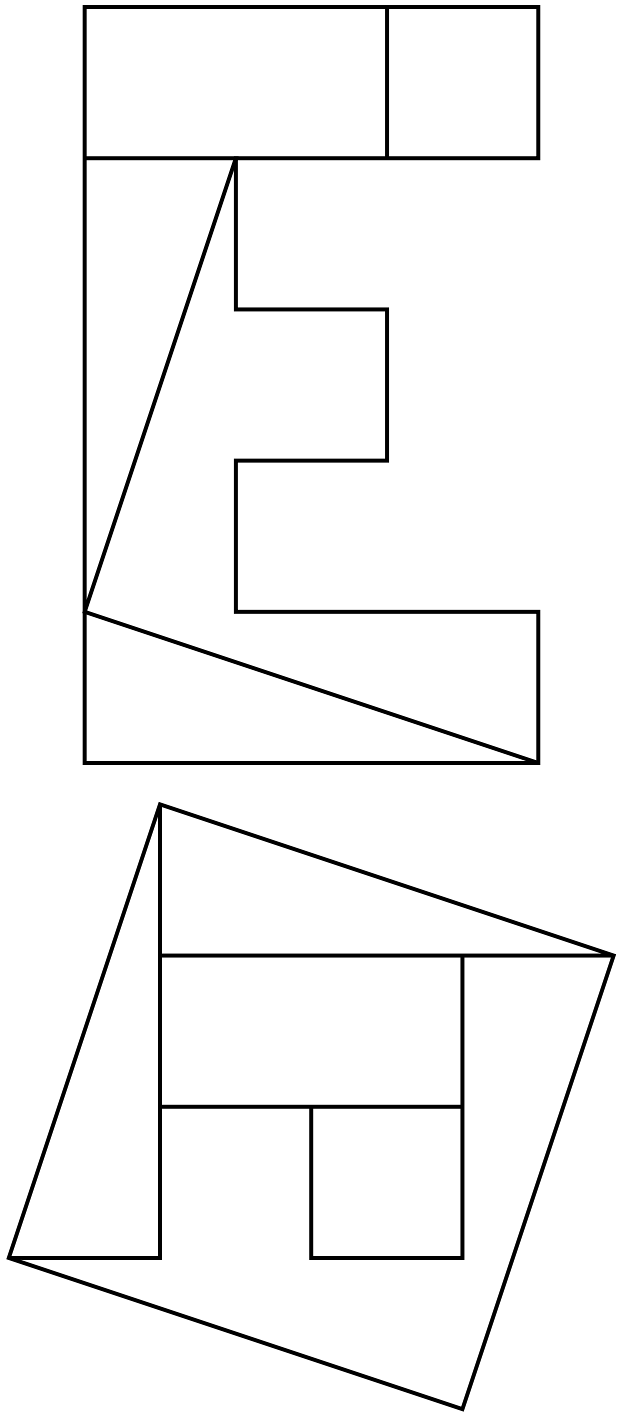
Trois carrés



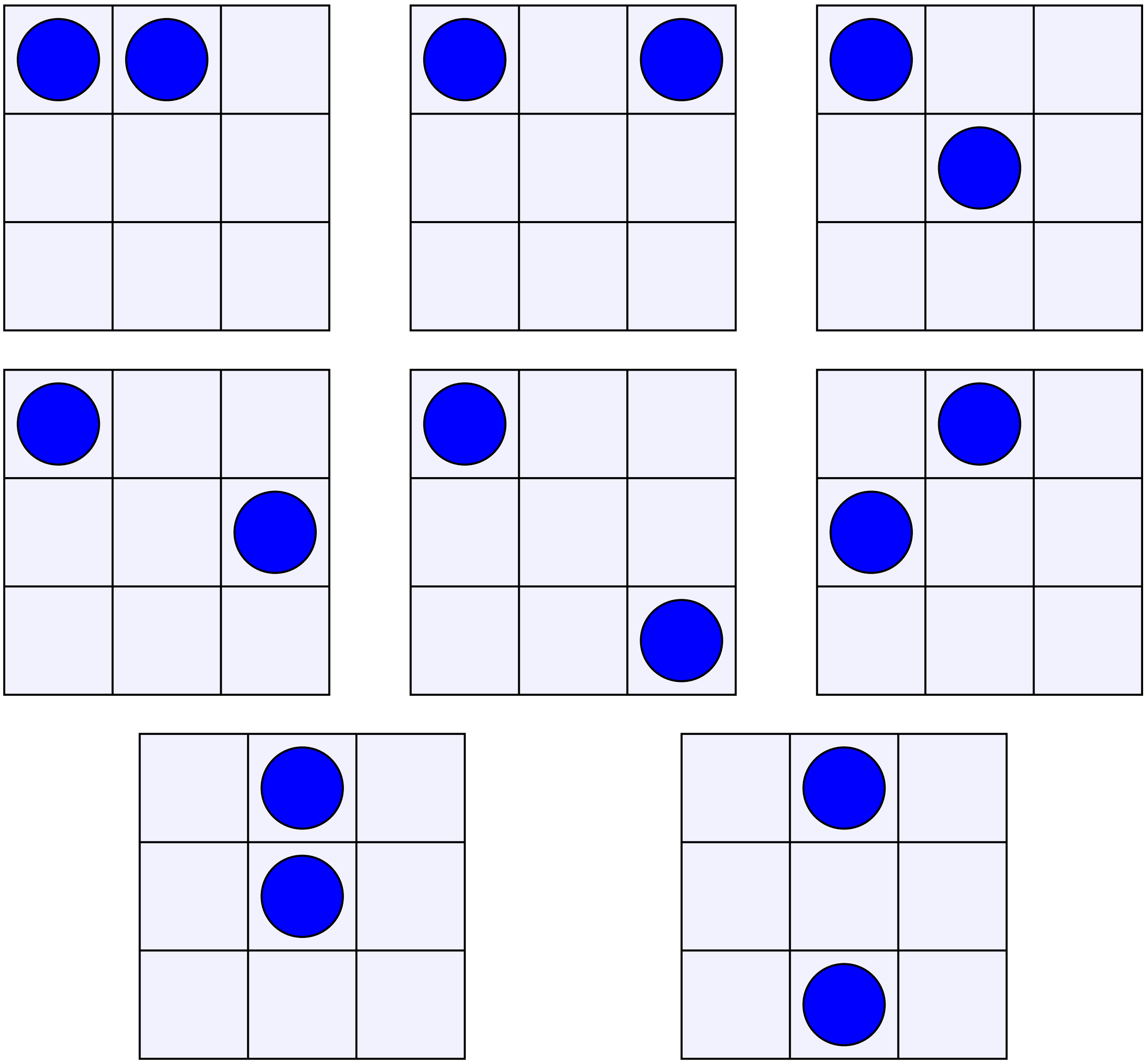
Solution du défi 60



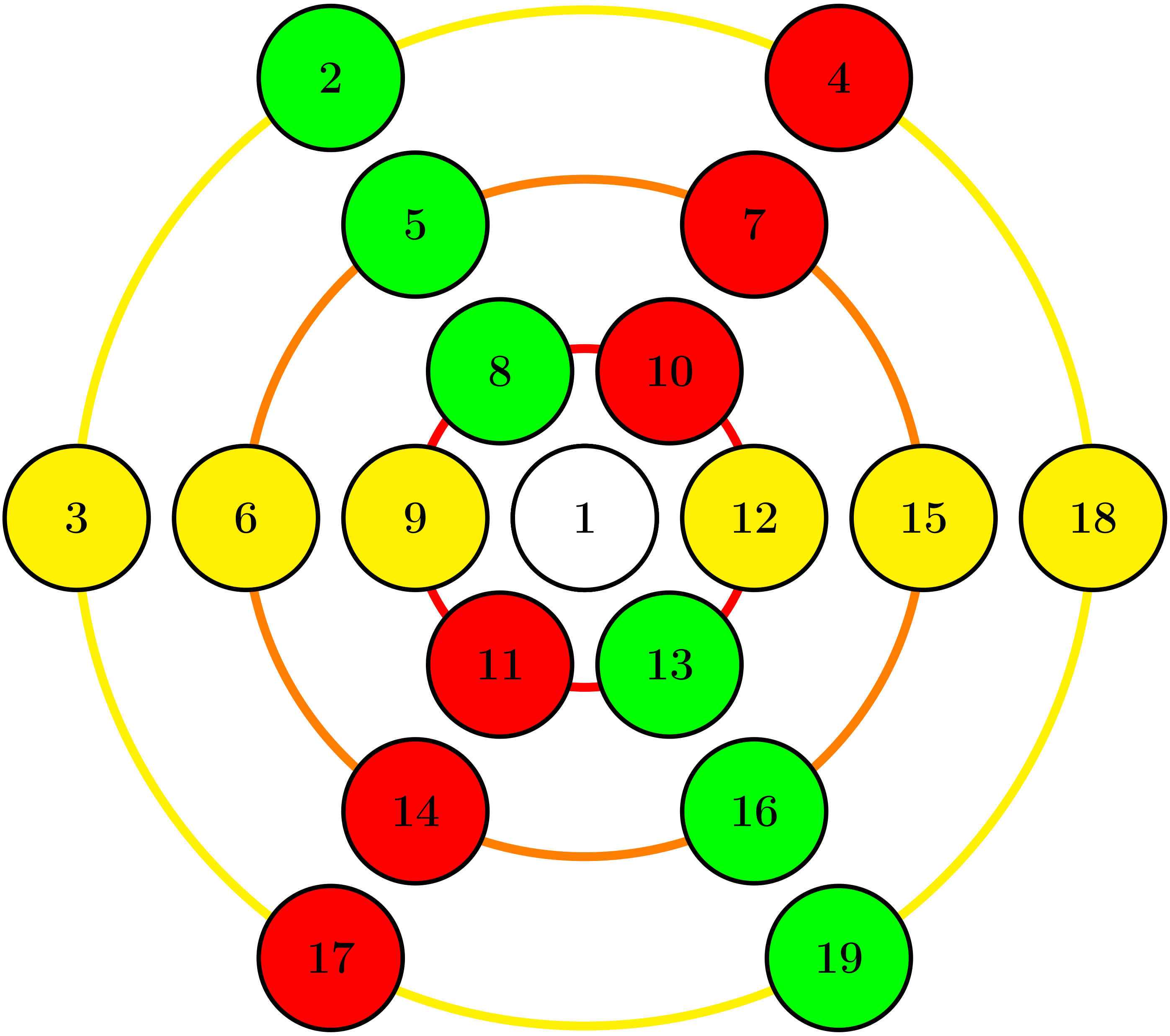
Solution du défi 61



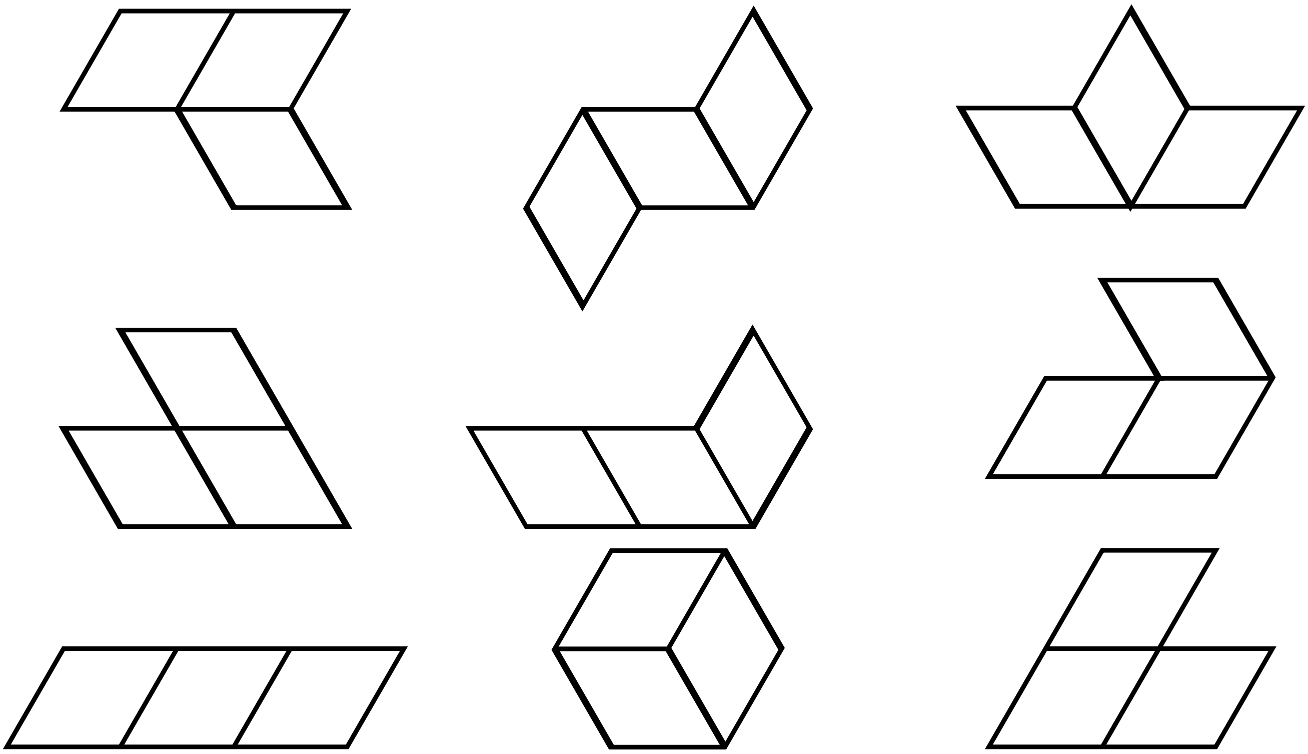
Solution du défi 62



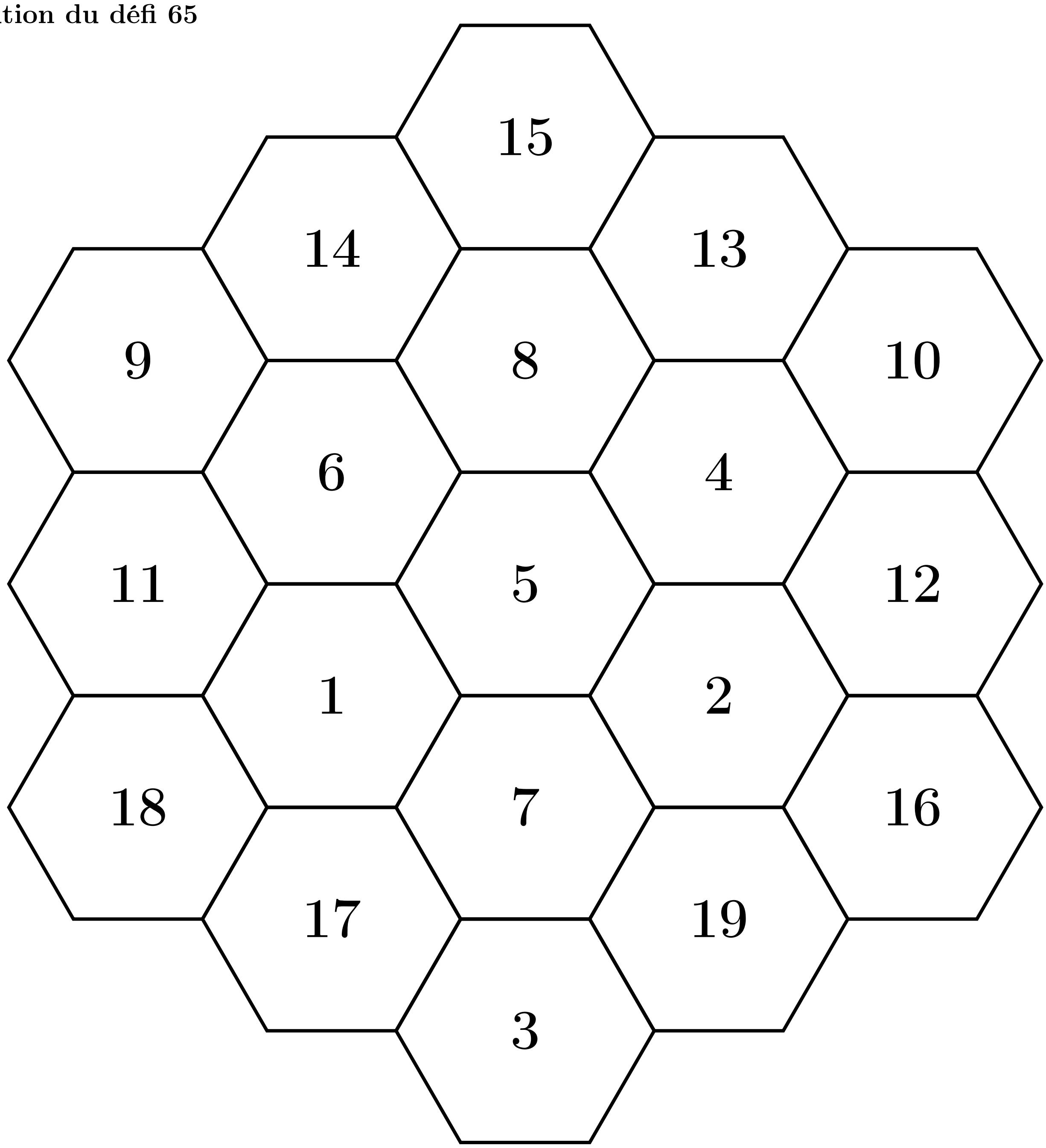
Solution du défi 63



Solution du défi 64



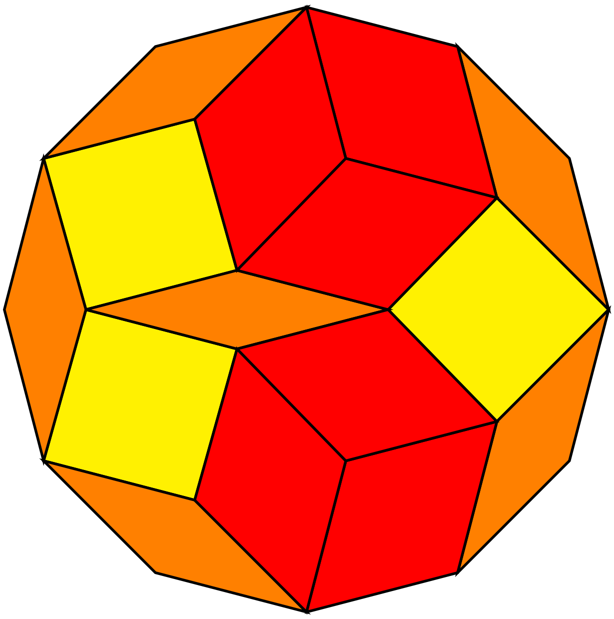
Solution du défi 65

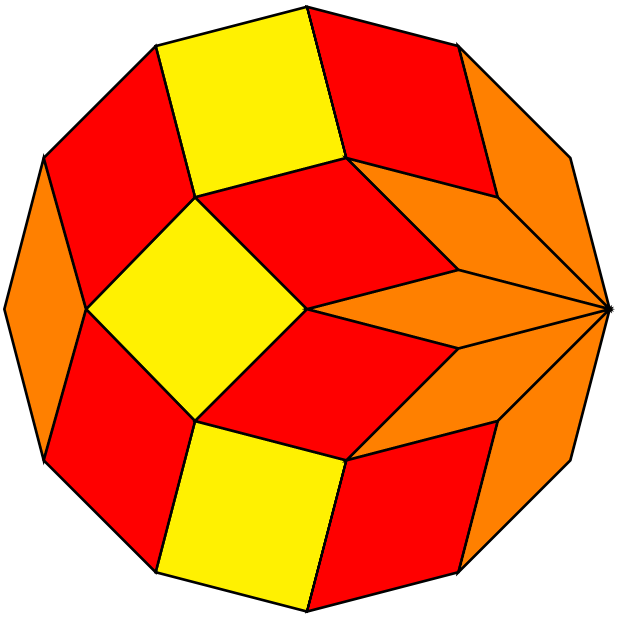


Cette solution est unique et a été trouvée par Clifford W. Adam en 1957.

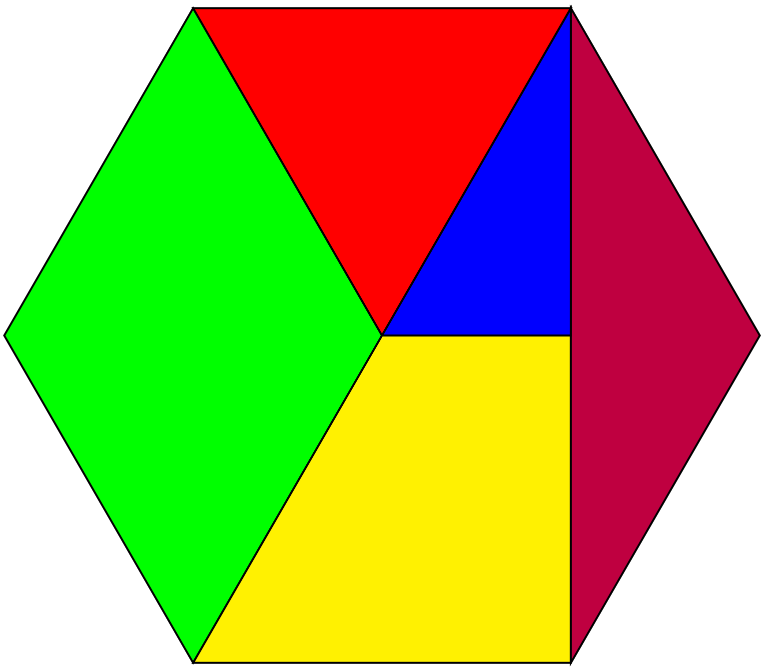
Solution du défi 66

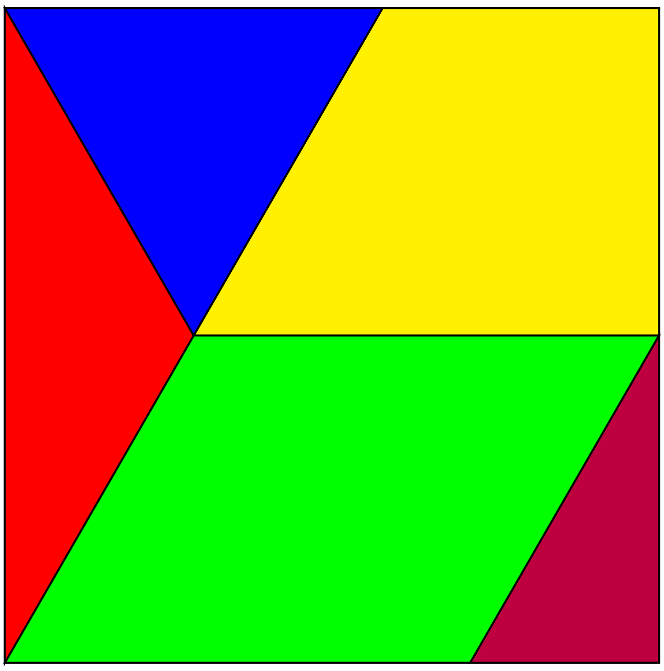
Deux solutions





Solution du défi 67

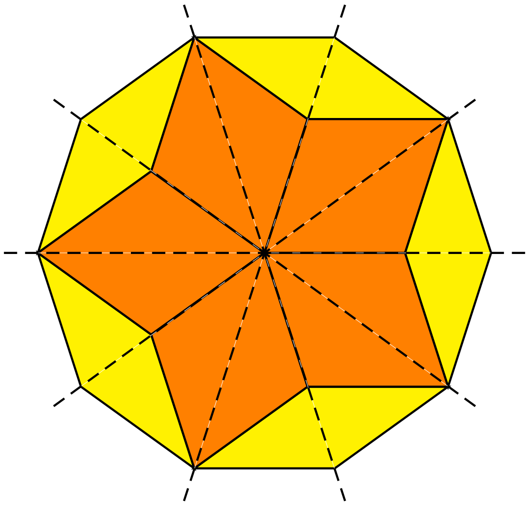




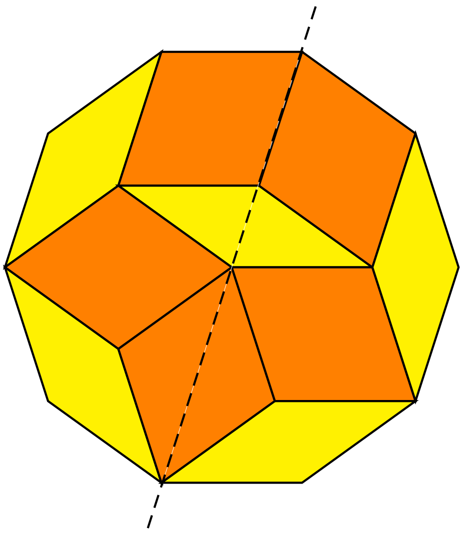
Solution du défi 68

Trois solutions

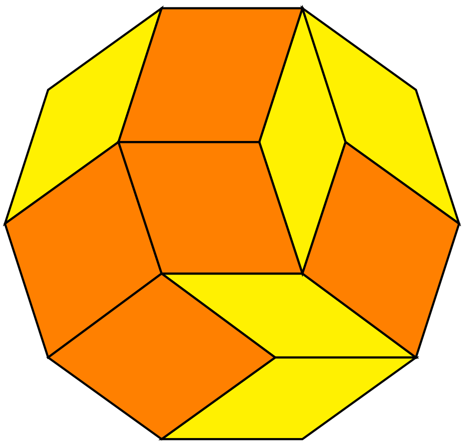
Solution avec cinq axes de symétrie



Solution avec un seul axe de symétrie

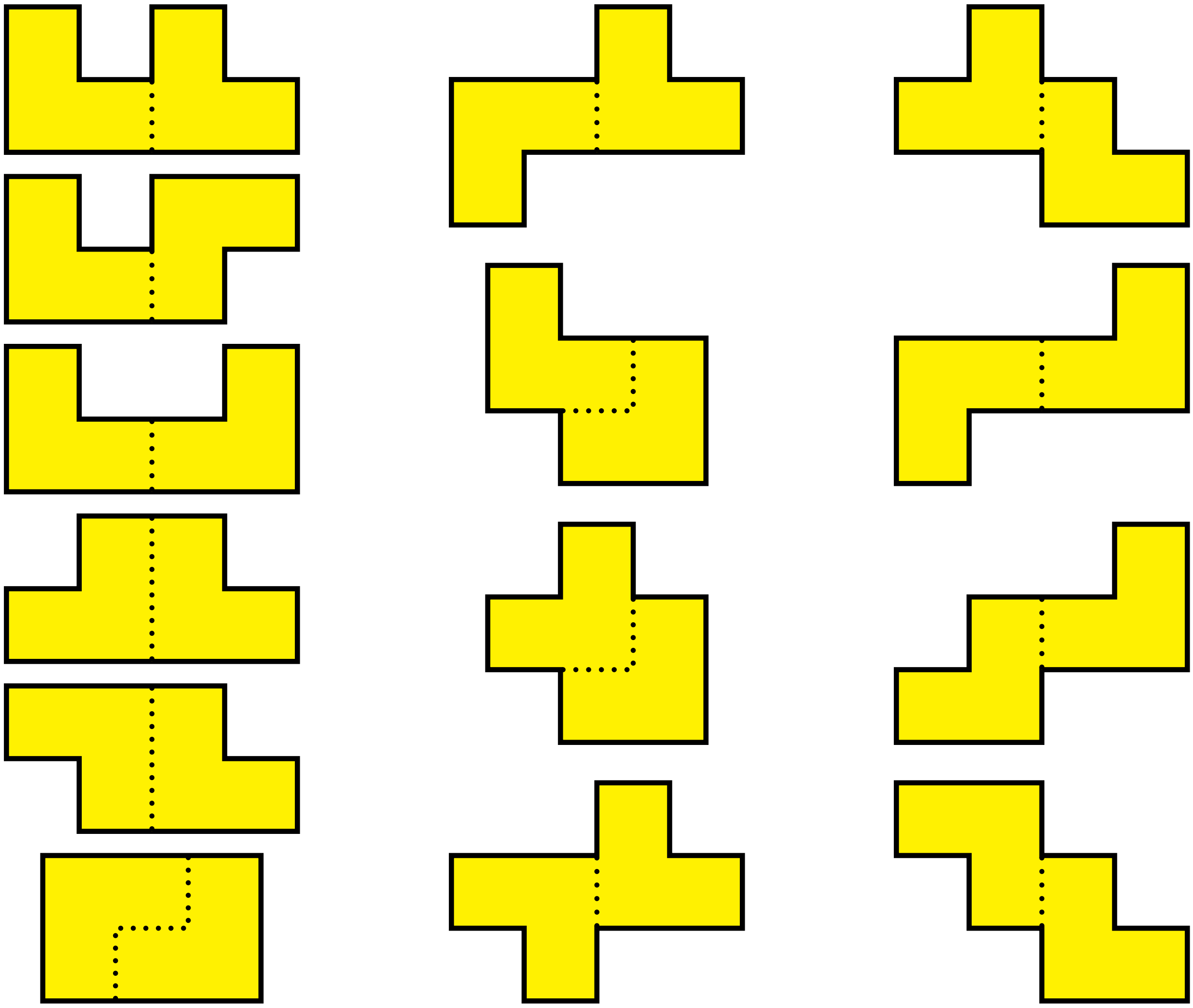


Solution avec aucun axe de symétrie

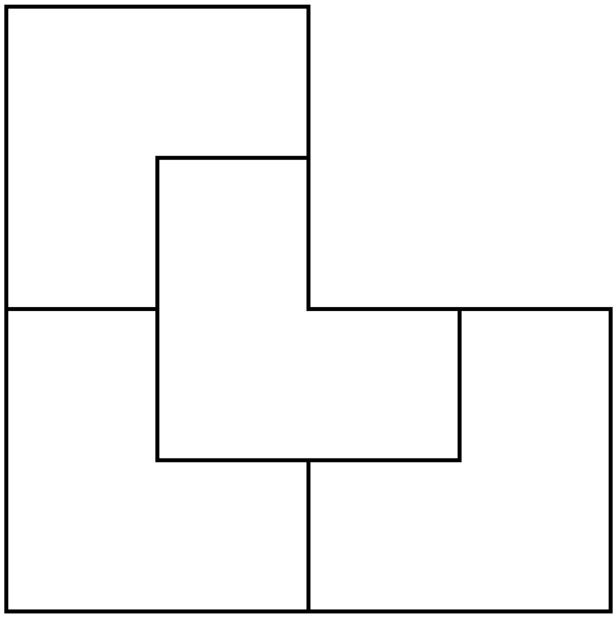


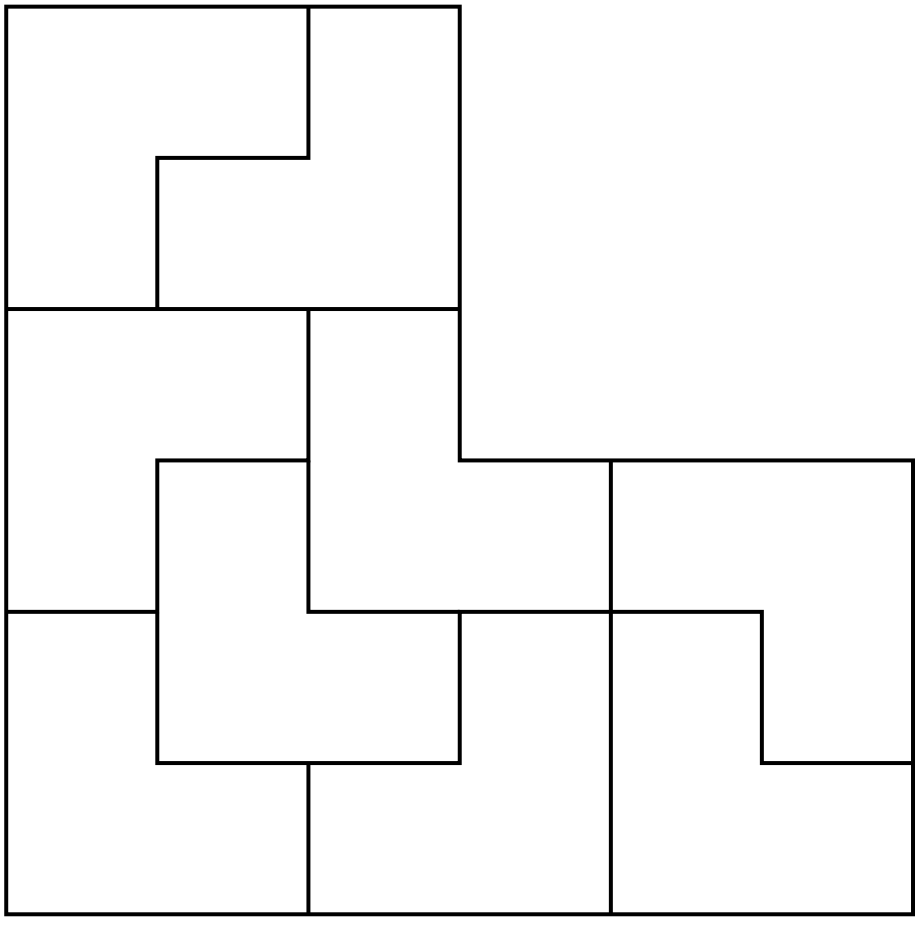
Solution du défi 69

Les 14 *diels*

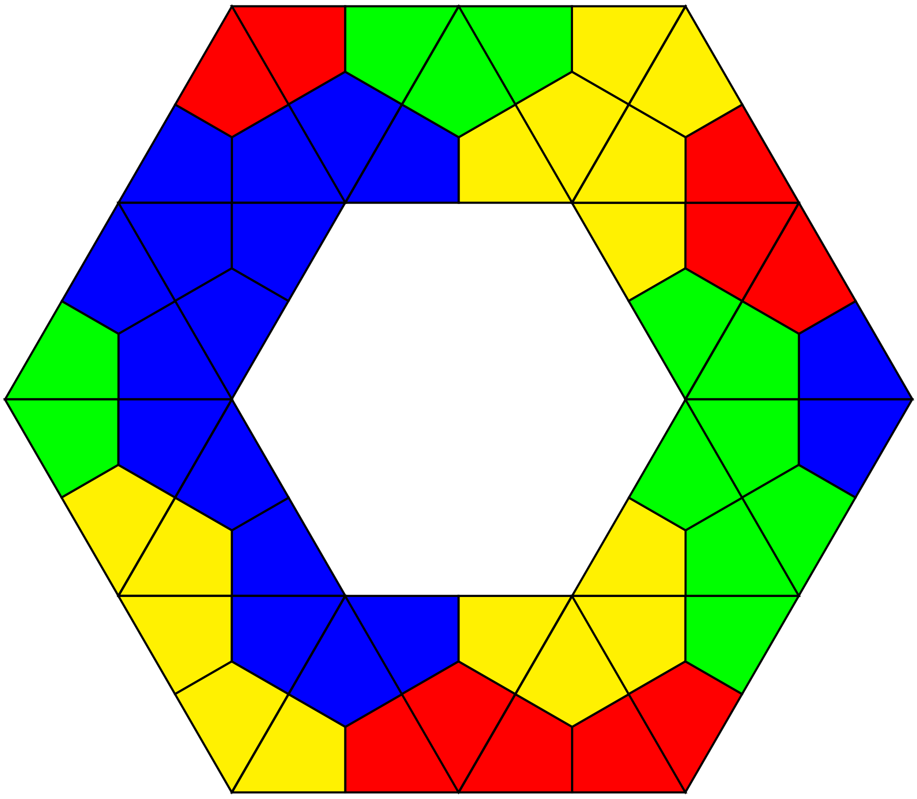


Solution du défi 70

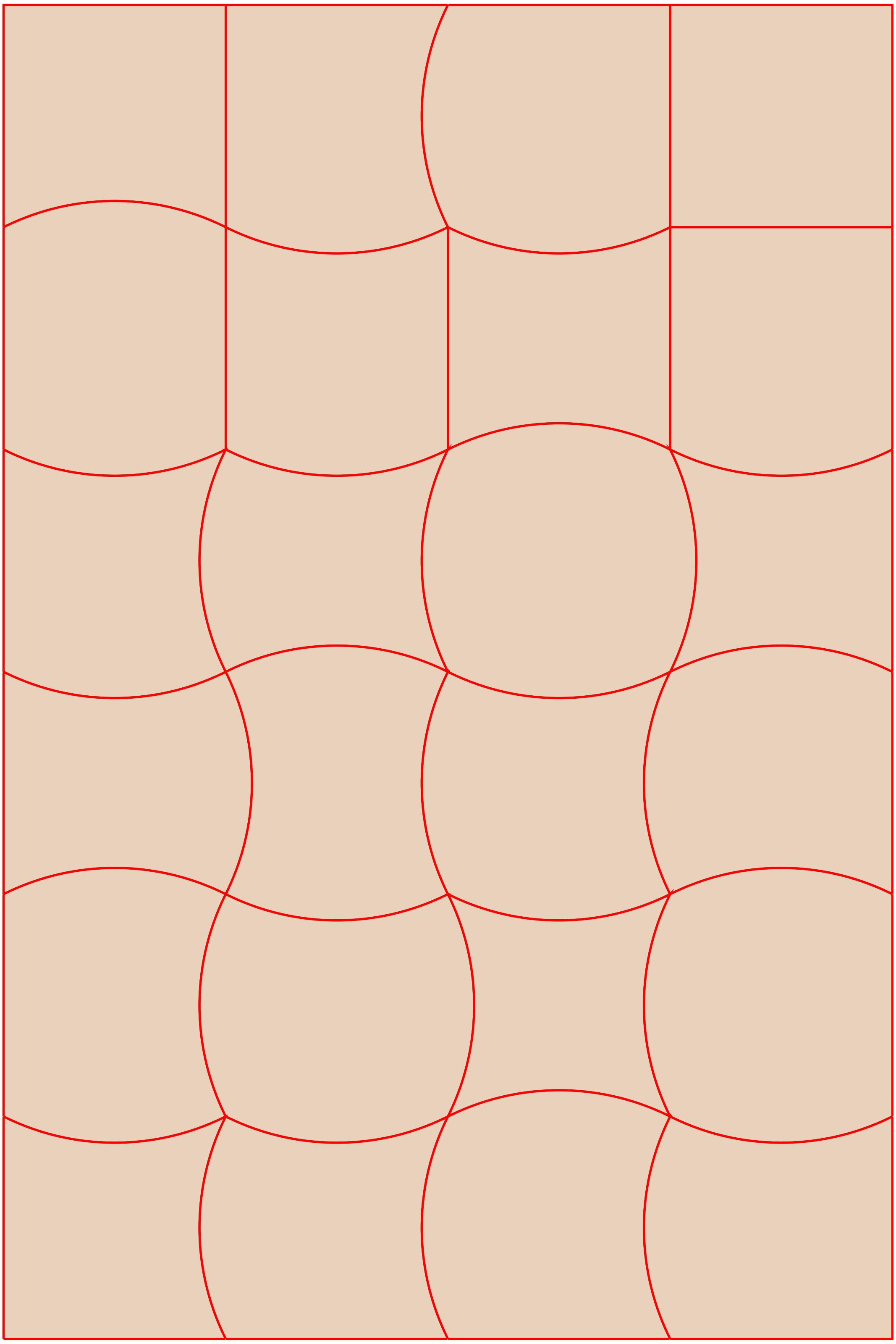




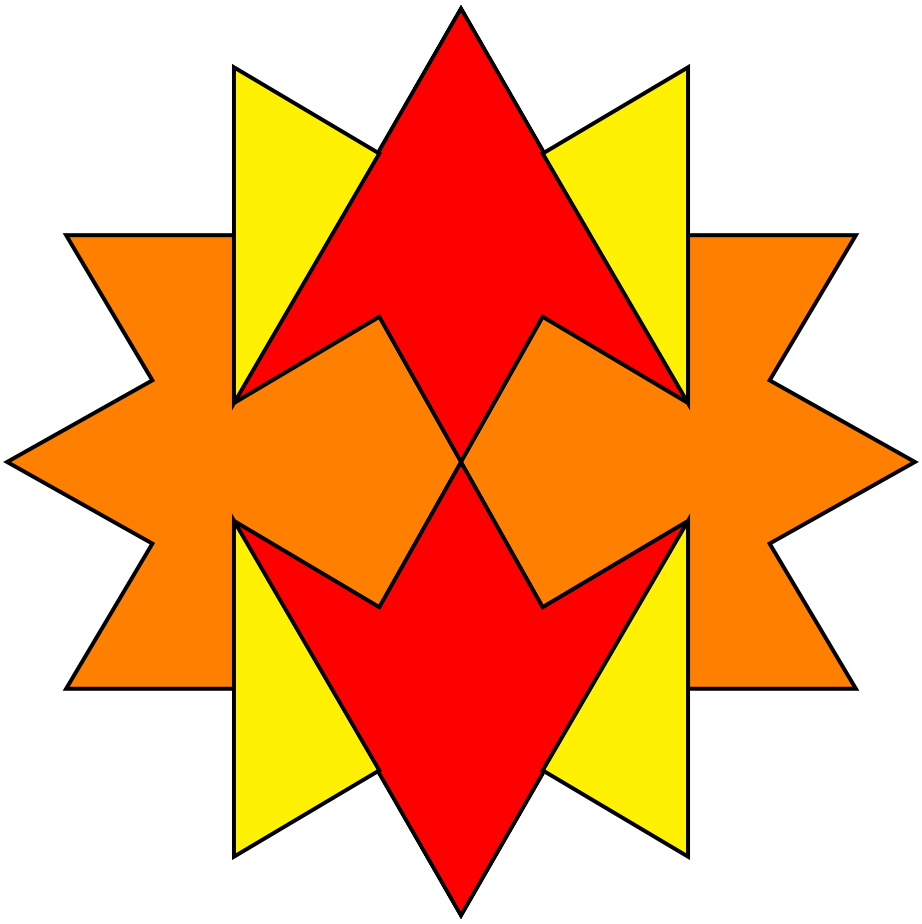
Solution du défi 71



Solution du défi 72

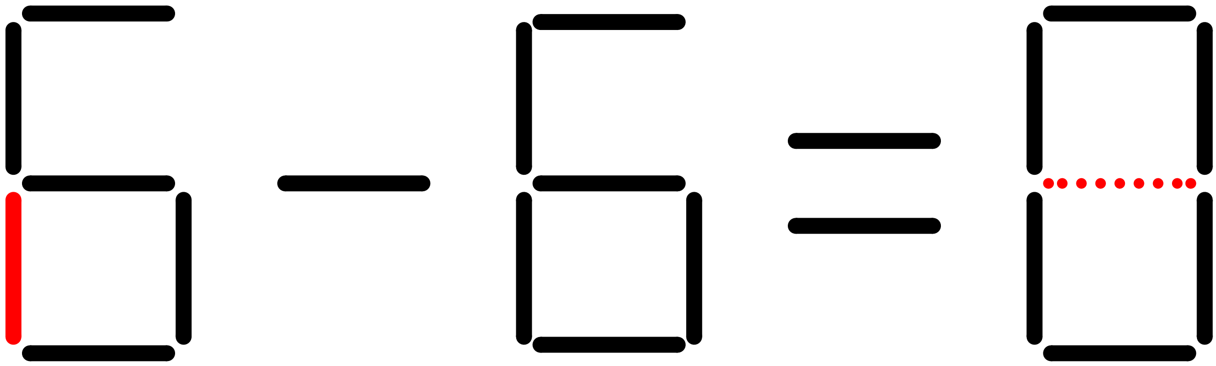


Solution du défi 73

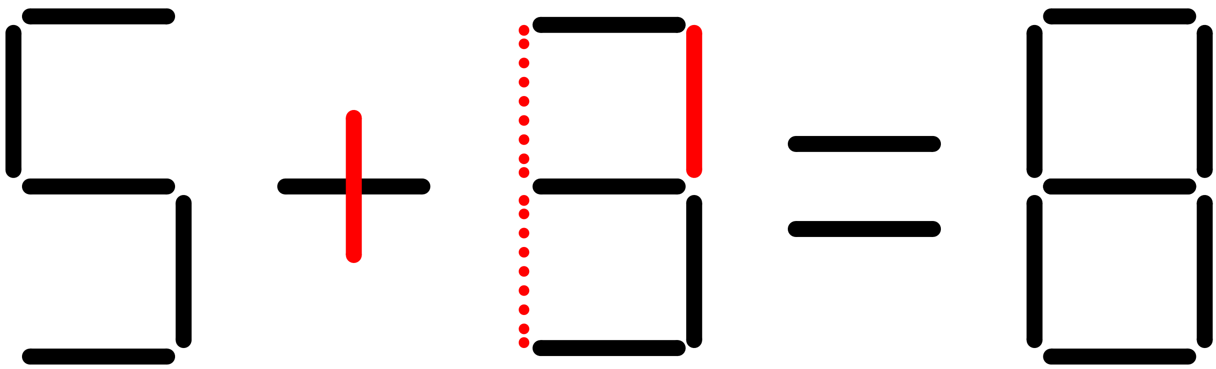


Solution du défi 74

Solution pour le défi avec 1 allumette (`6 - 6 = 0`)

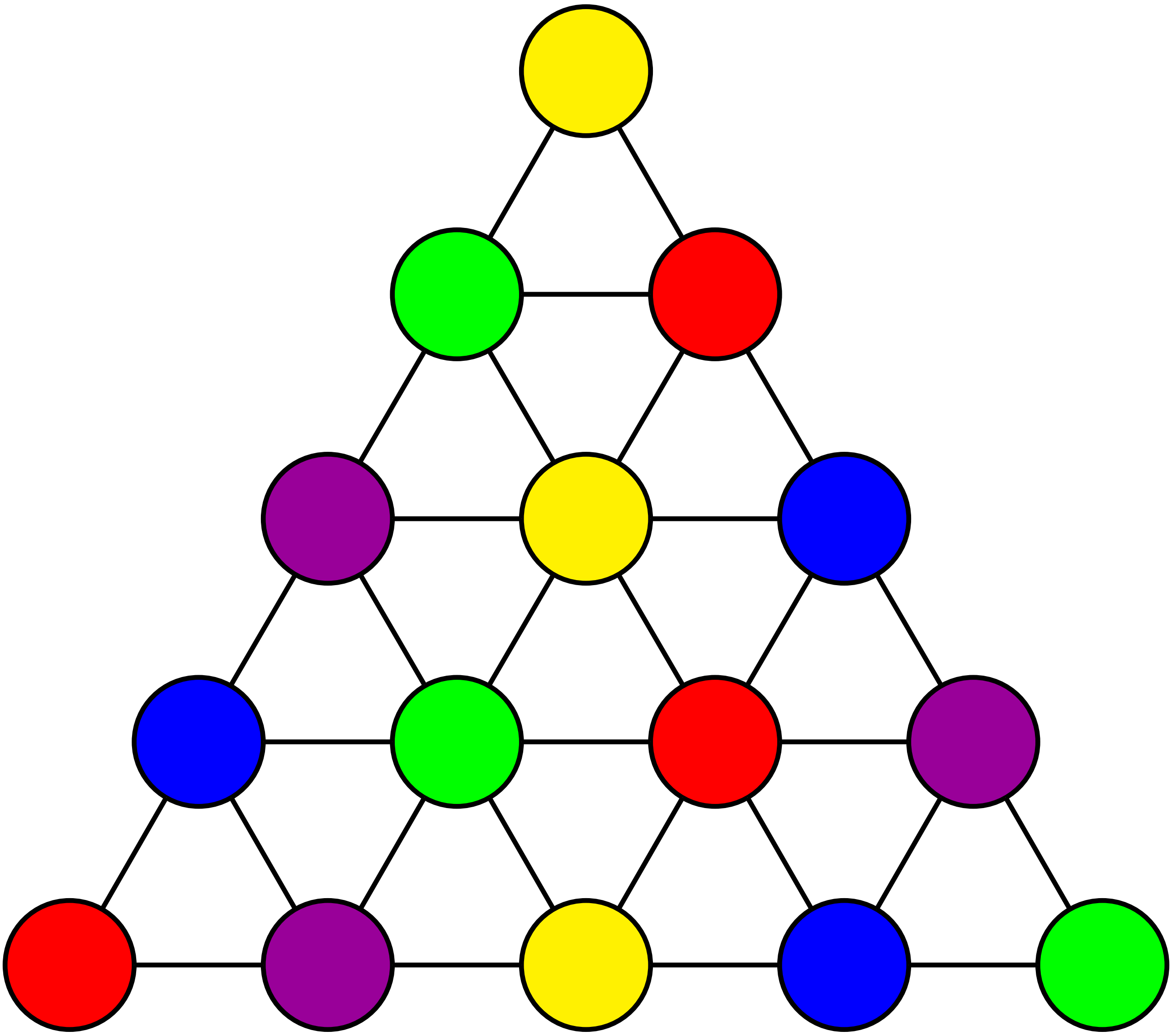


Solution pour le défi avec 2 allumettes (`5 + 3 = 8`)



Solution du défi 75

Une des nombreuses solutions



Solution du défi 76

On va utiliser la grille suivante pour la résolution :

	2	3	2	1	
2	A	B	C	D	1
1	E	F	G	H	3
3	I	J	K	L	2
2	M	N	O	P	3
	2	1	2	3	

L'information « 1 » permet de placer un gratte-ciel de hauteur « 40 » en cellules D, E et N.

Puisqu'il n'y a qu'un gratte-ciel de hauteur « 40 » par ligne et par colonne, le quatrième gratte-ciel de hauteur « 40 » est en cellule K.

L'information « 2 » à gauche de la première ligne interdit d'avoir un gratte-ciel de hauteur « 10 » en cellule A (il y aurait en effet un gratte-ciel de hauteur « 20 » ou de hauteur « 30 » en cellule B). Celui-ci est donc en cellule B ou en cellule C.

Supposons qu'il y ait un gratte-ciel de hauteur « 10 » en cellule C. L'information « 2 » en haut de la troisième colonne invalide cette hypothèse (il y aurait en effet un gratte-ciel de hauteur « 20 » ou de hauteur « 30 » en cellule G). Le gratte-ciel de hauteur « 10 » est donc en cellule B.

Cette même information « 2 » impose le gratte-ciel de hauteur « 20 » en cellule C et le gratte-ciel de hauteur « 30 » en cellule A.

Dans la deuxième colonne, l'information en haut « 3 » impose d'avoir le gratte-ciel de hauteur « 20 » en cellule J et le gratte-ciel de hauteur « 30 » en cellule F.

L'information « 3 » à droite de la deuxième ligne impose d'avoir le gratte-ciel de hauteur « 10 » en cellule G et le gratte-ciel de hauteur « 20 » en cellule H.

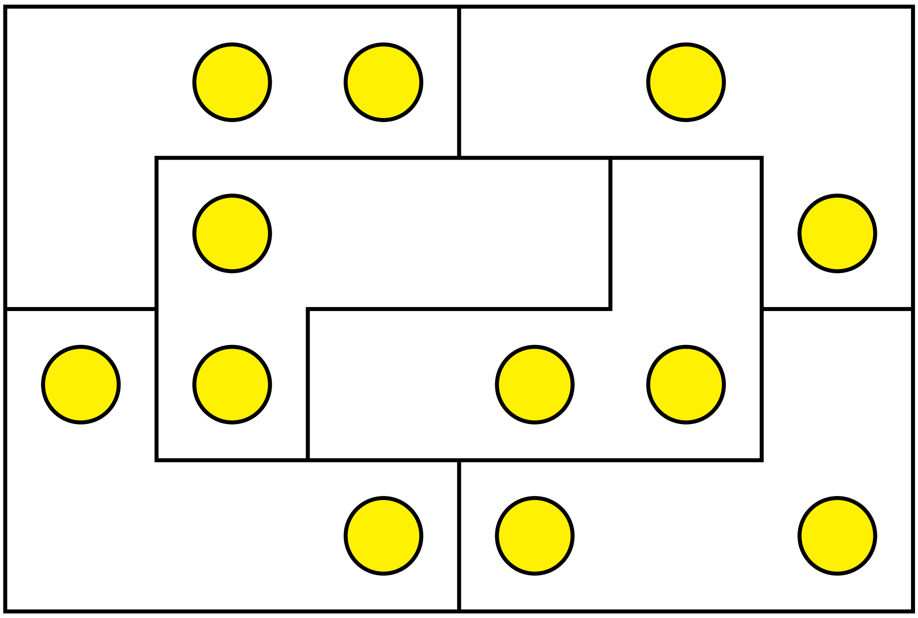
Puisqu'il n'y a qu'un gratte-ciel de hauteur « 30 » par ligne et par colonne, le quatrième gratte-ciel de hauteur « 30 » est en cellule O.

L'information « 3 » à gauche de la troisième ligne impose d'avoir le gratte-ciel de hauteur « 30 » en cellule I et le gratte-ciel de hauteur « 10 » est en cellule L.

On termine rapidement : le quatrième gratte-ciel de hauteur « 20 » est en cellule M et le quatrième gratte-ciel de hauteur « 10 » est en cellule P.

30	10	20	40
40	30	10	20
10	20	40	30
20	40	30	10

Solution du défi 77



Solution du défi 78

6	$\div$	2	$=$	3
$+$		$\times$		
1	$+$	4	$=$	5
$=$		$=$		
7		8		

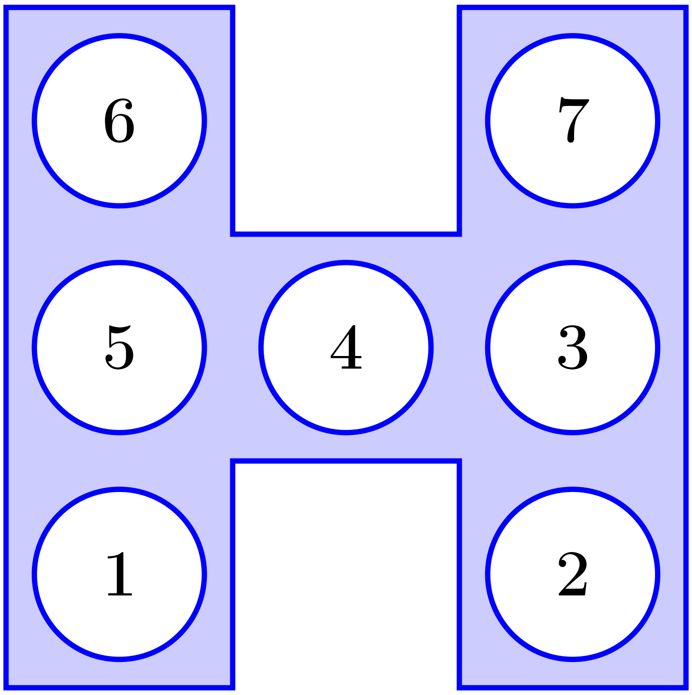
Solution du défi 79

La somme des nombres de 1 à 7 est égale à 28. Une fois le nombre central placé, il reste deux alignements verticaux dont les sommes sont égales.

On en déduit que le nombre c central est pair : il vaut donc 4 ou 6.

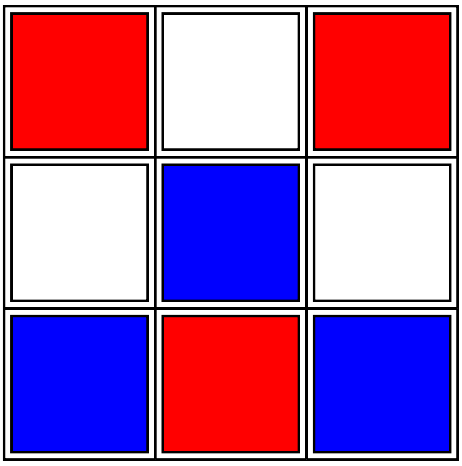
Le nombre 4 placé au centre conduit à la solution ci-dessous ; les somme de trois nombres alignés sont alors toujours égales à 12.

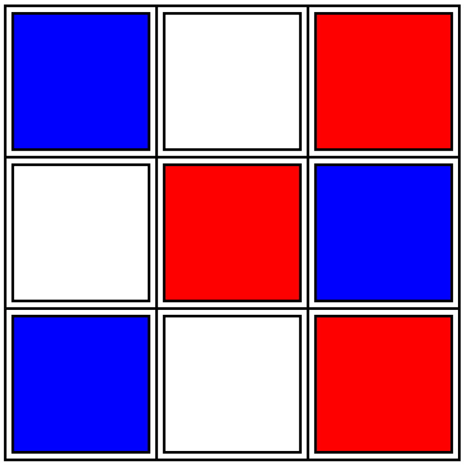
En plaçant 6 au centre, on ne réussit qu'à obtenir quatre sommes égales à 11.

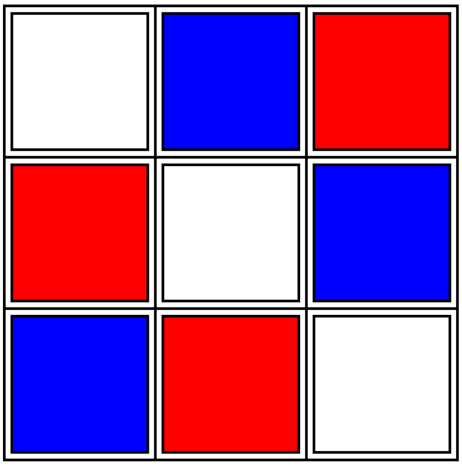


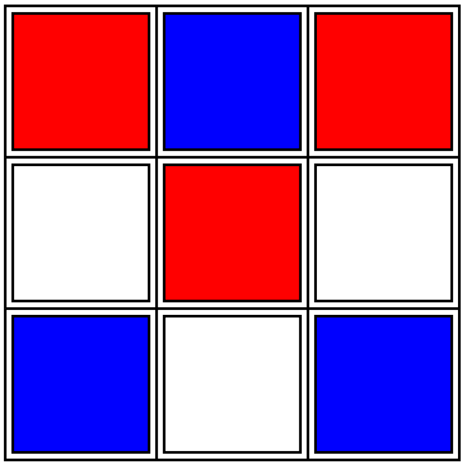
Solution du défi 80

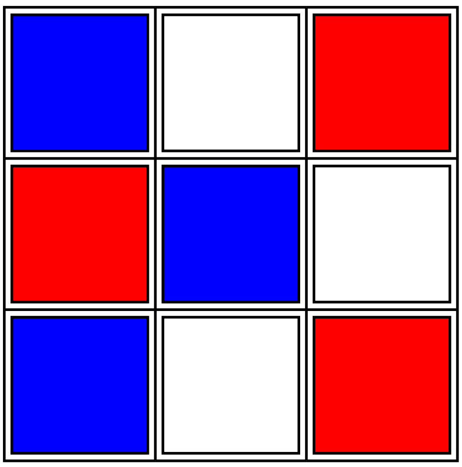
Il y a 5 solutions.







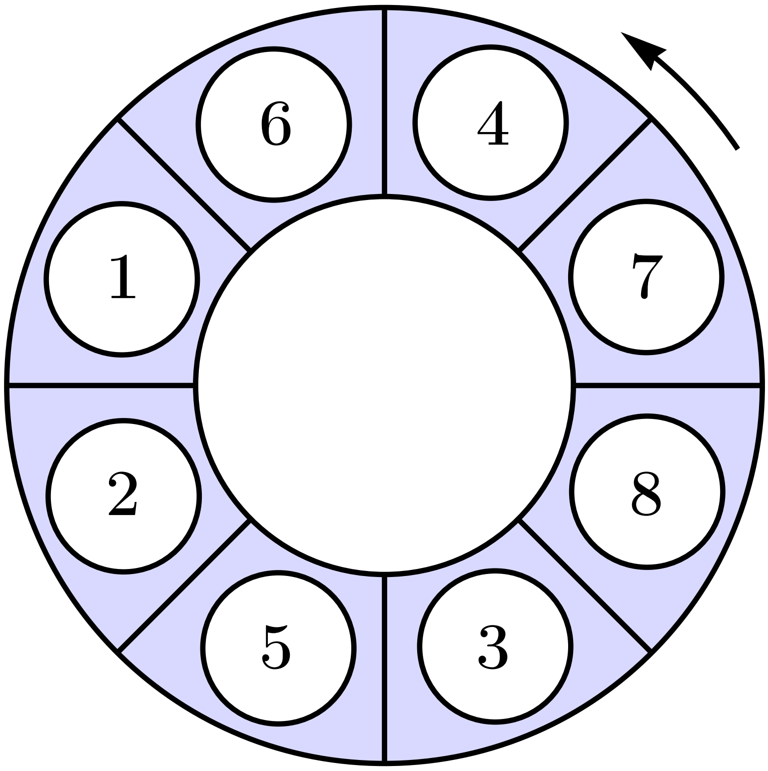




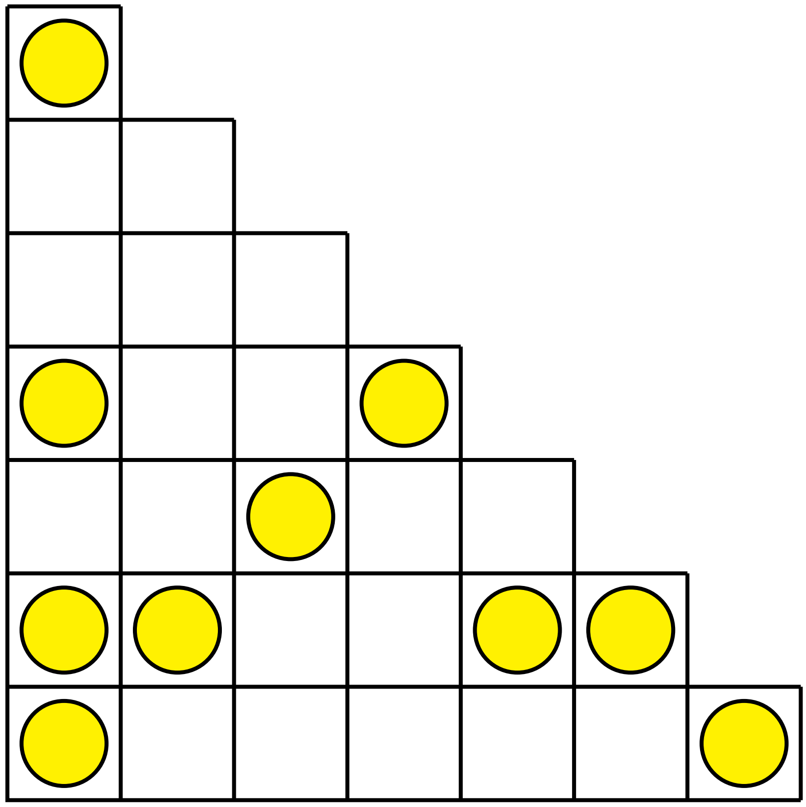
Solution du défi 81

Il suffit de raisonner « à rebours » pour trouver la solution.

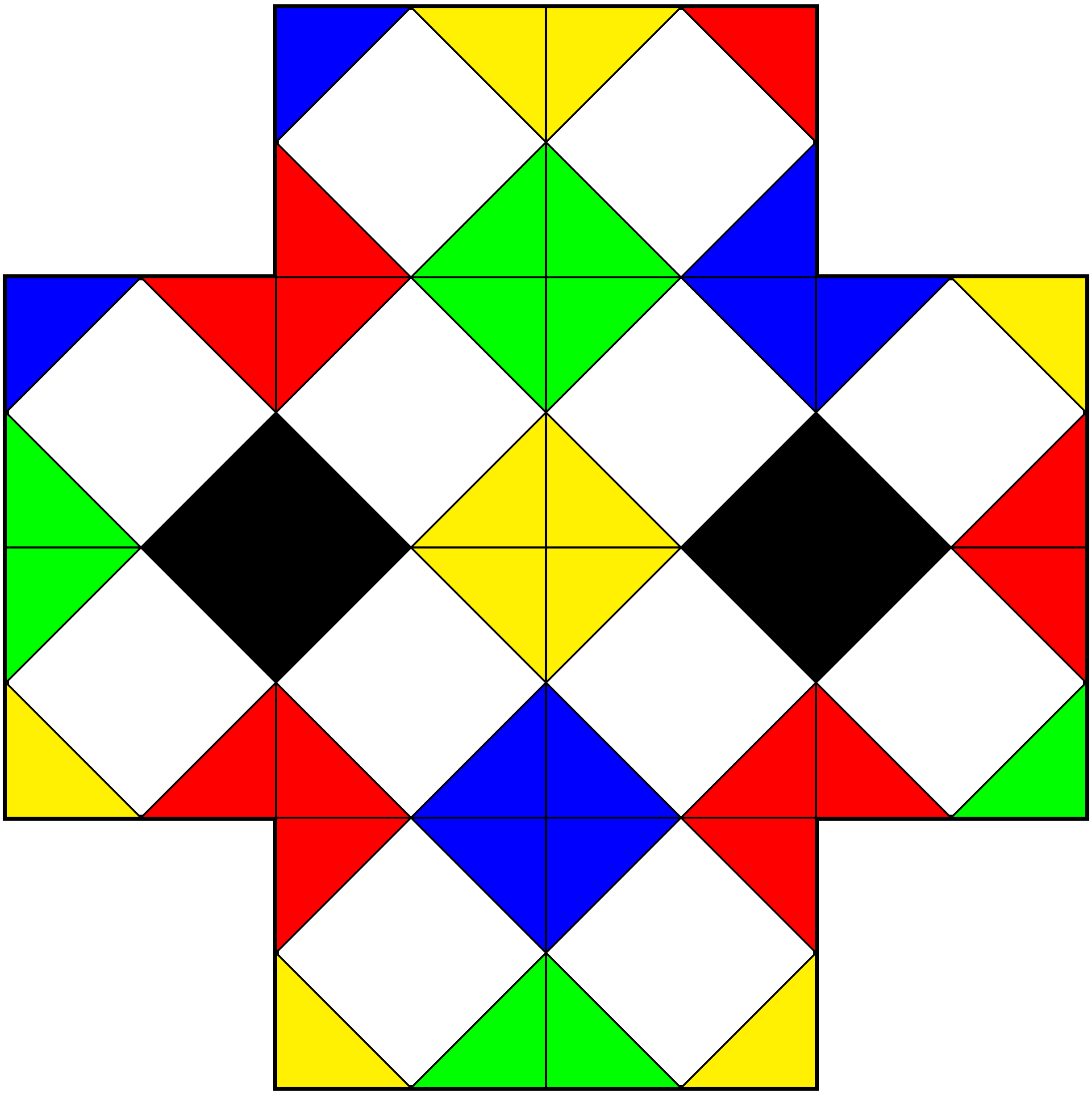
En partant du 8, on recule de 7 cases et on place le 7. Puis on recule de 6 cases et on place le 6. Et ainsi de suite jusqu'au 1.



Solution du défi 82

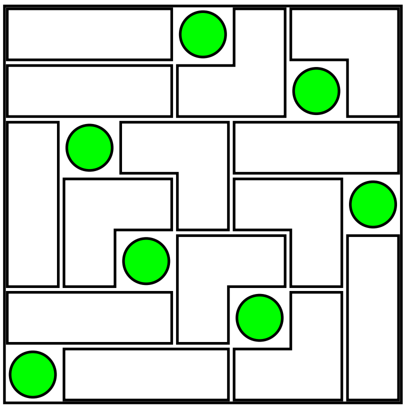


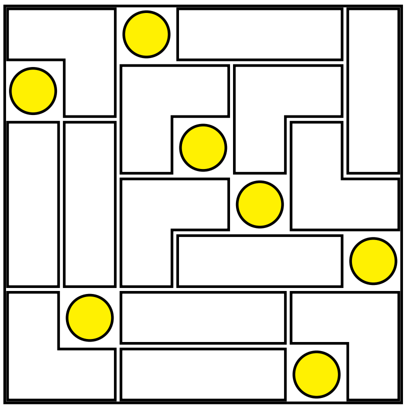
Solution du défi 83

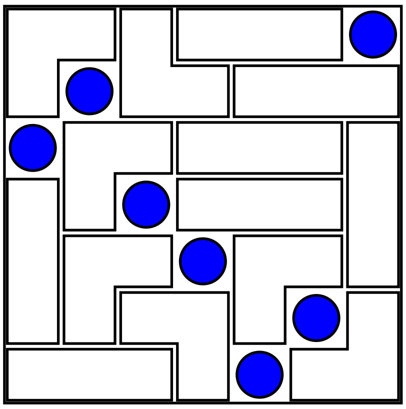


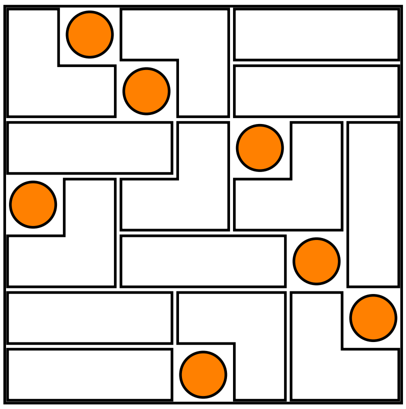
Solution du défi 84

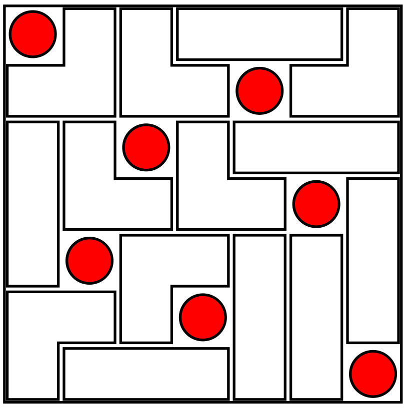
Quelques solutions (non uniques)...

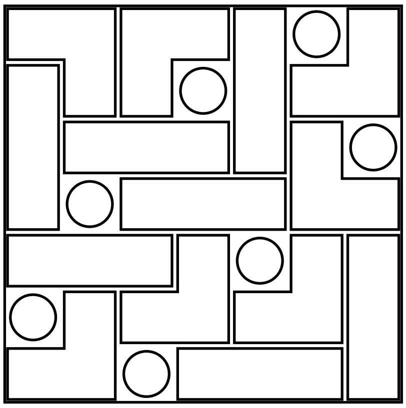


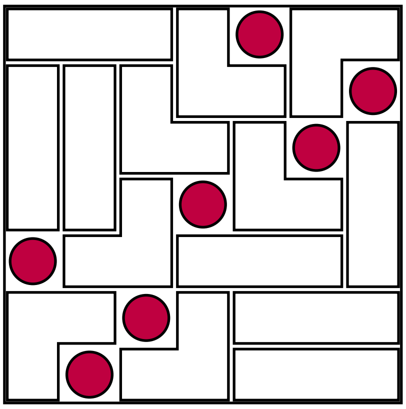




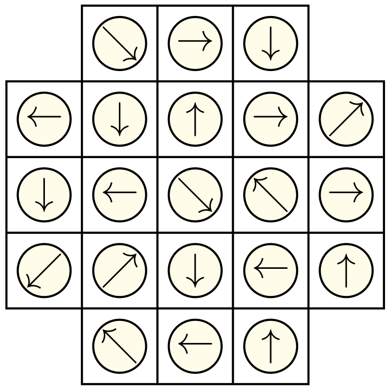








Solution du défi 85

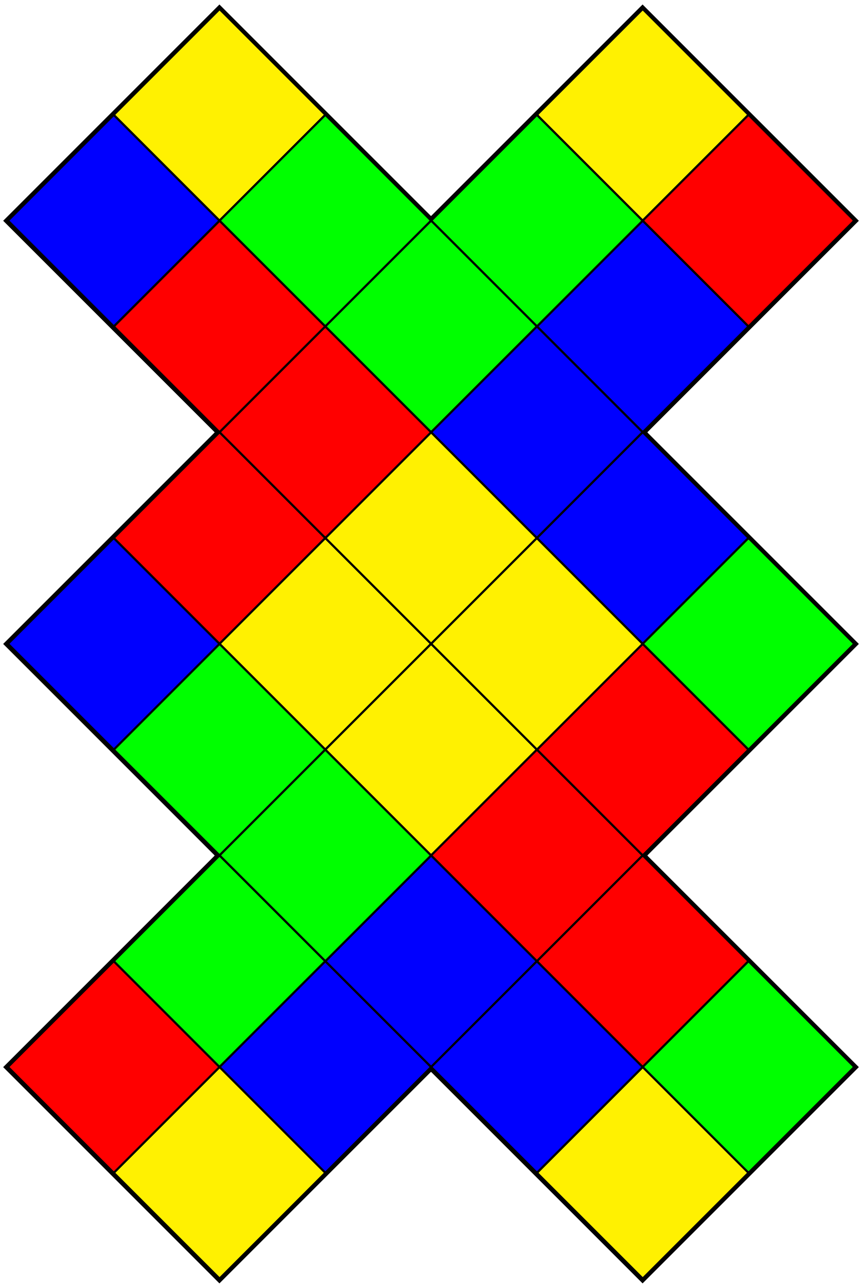


Solution du défi 86

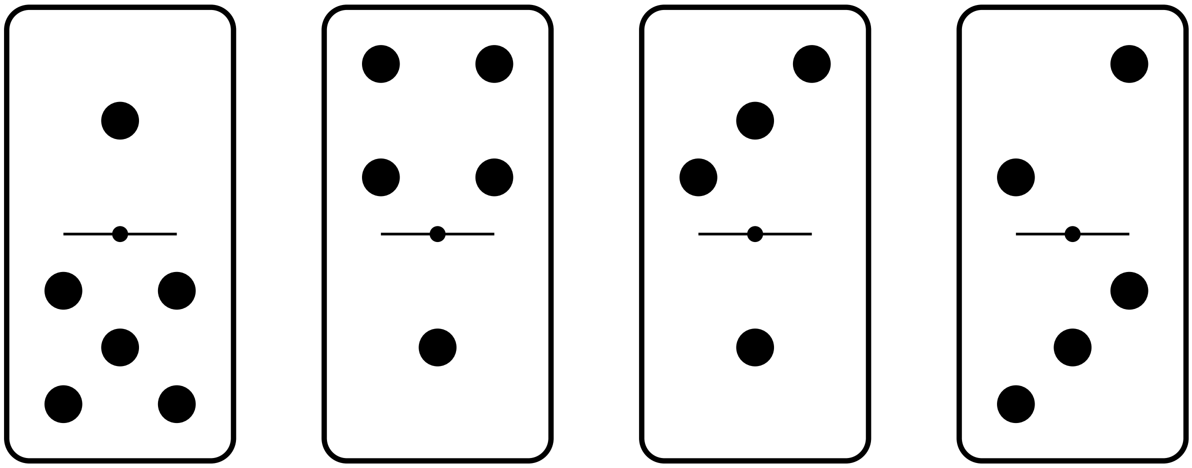
La solution minimale demande 23 déplacements.

A	B	F	E	C	A	B	F	E	C	A	B	D
H	G	A	B	D	H	G	D	E	F			

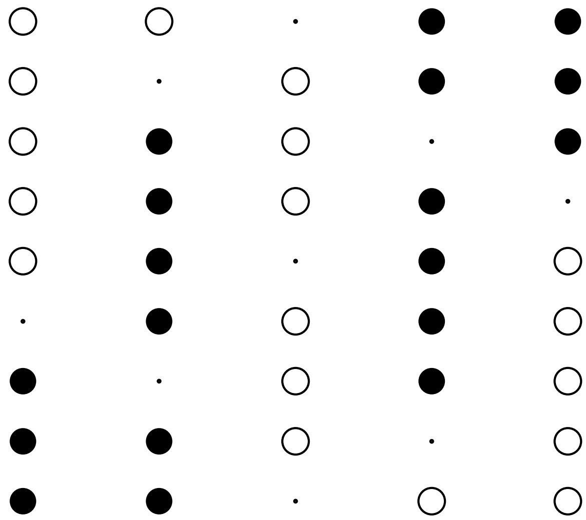
Solution du défi 87



Solution du défi 88



Solution du défi 89



Penchons-nous sur le cas général, où se trouvent n grenouilles vertes et n grenouilles brunes.
Chacune des n grenouilles vertes rencontre chacune des n grenouilles brunes et il ne peuvent se croiser que si l'une des deux saute par-dessus l'autre : il faut donc n^2 sauts.
De plus, la file des grenouilles vertes ne peut pendre celle de la file des grenouilles brunes qu'après n pas : il faut donc $2\,n$ avancées d'un pas.
Il faut donc, au total, $n^2 + 2\,n$ coups.

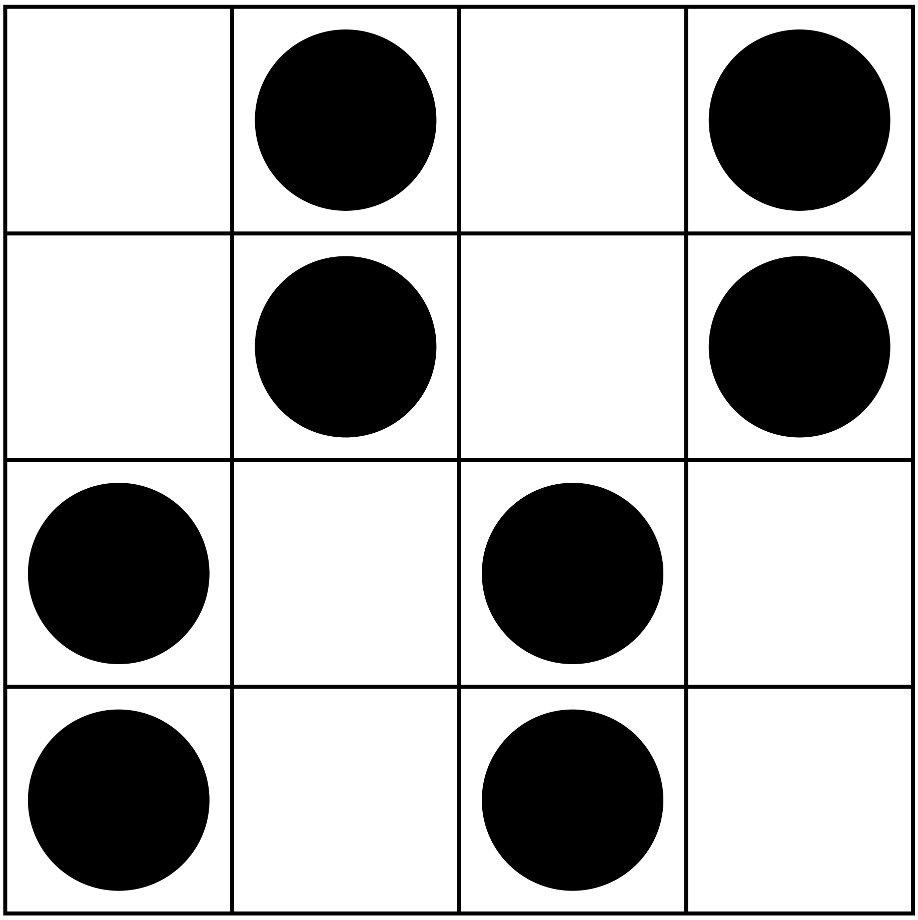
Solution du défi 90

Les jetons sont à déplacer dans l'ordre suivant.

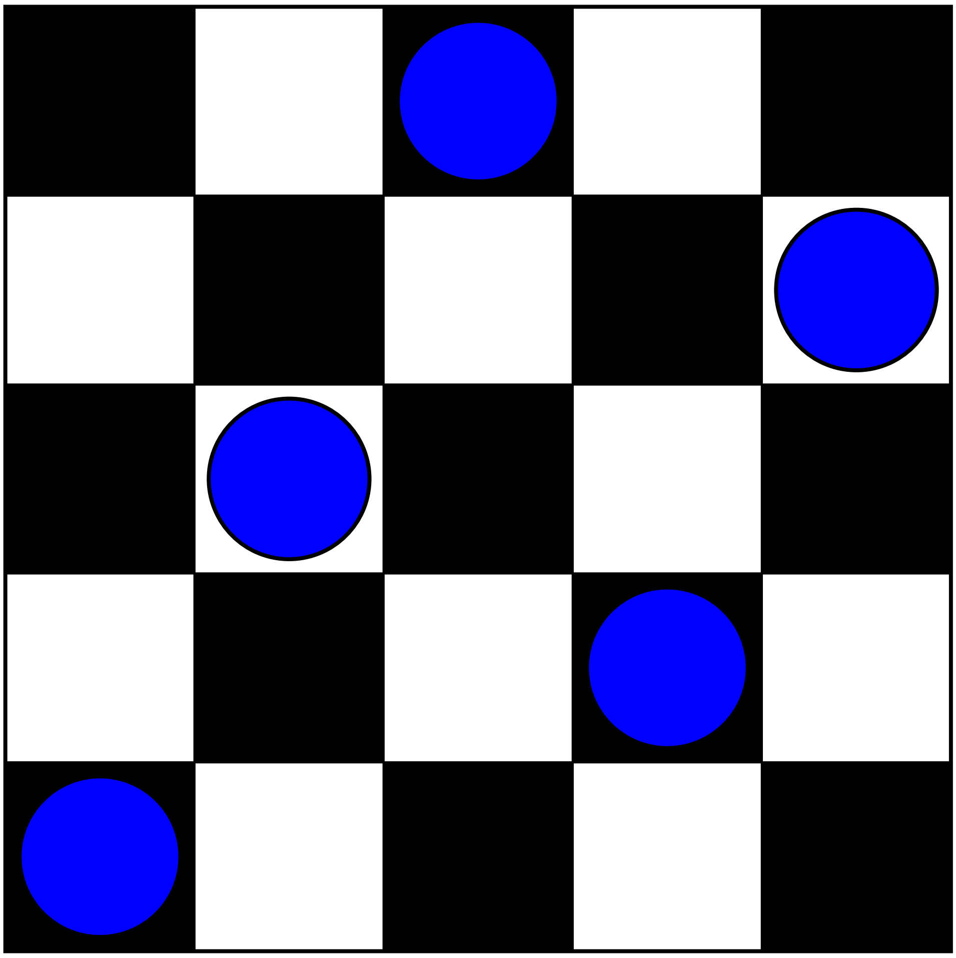
1. K
2. C
3. E
4. K
5. W
6. T
7. C
8. E
9. H
10. M
11. K
12. W
13. T
14. A
15. N
16. C
17. E
18. H
19. M
20. I
21. K
22. C
23. E
24. H
25. M
26. T

Solution du défi 91

Une solution

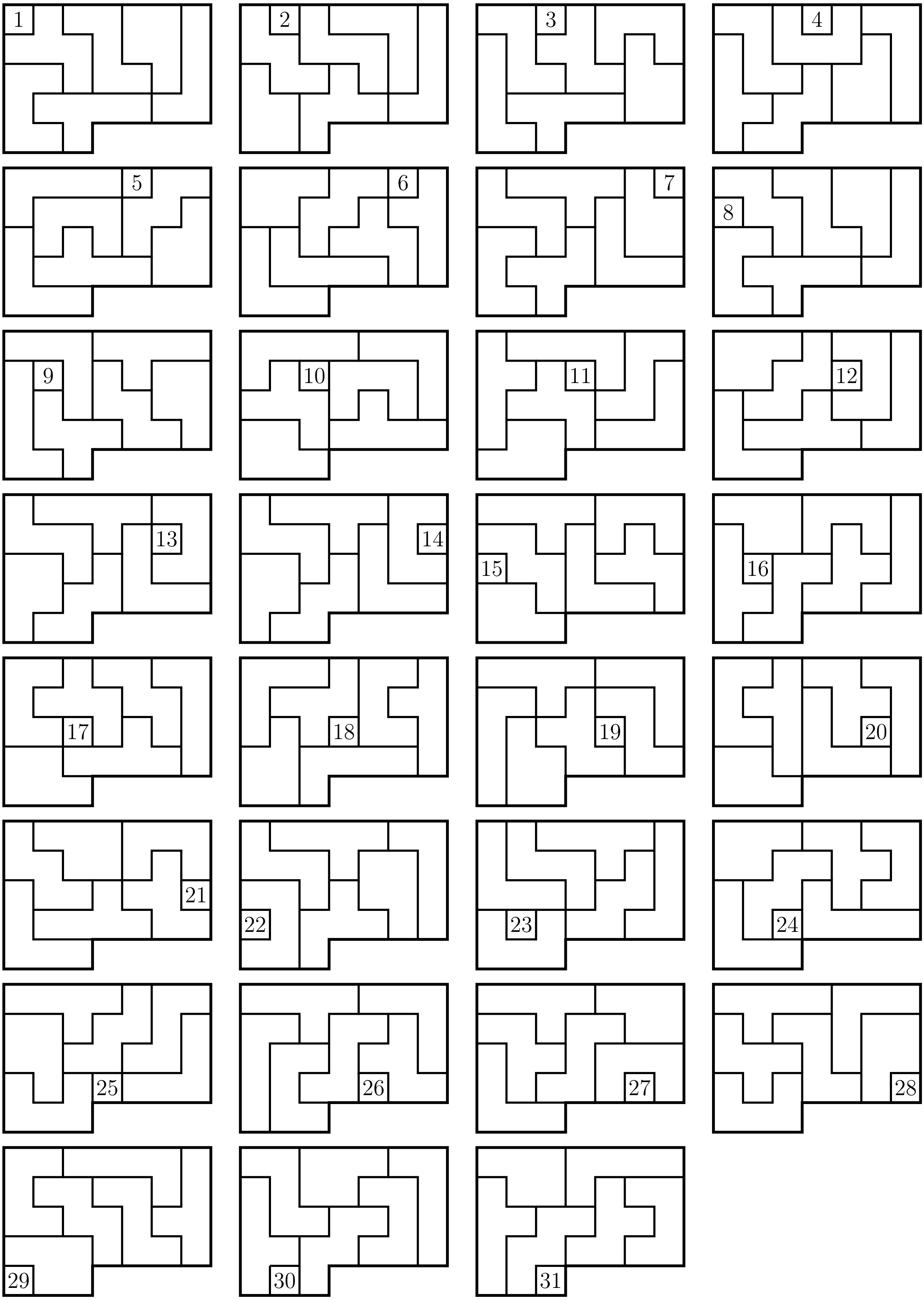


Solution du défi 92

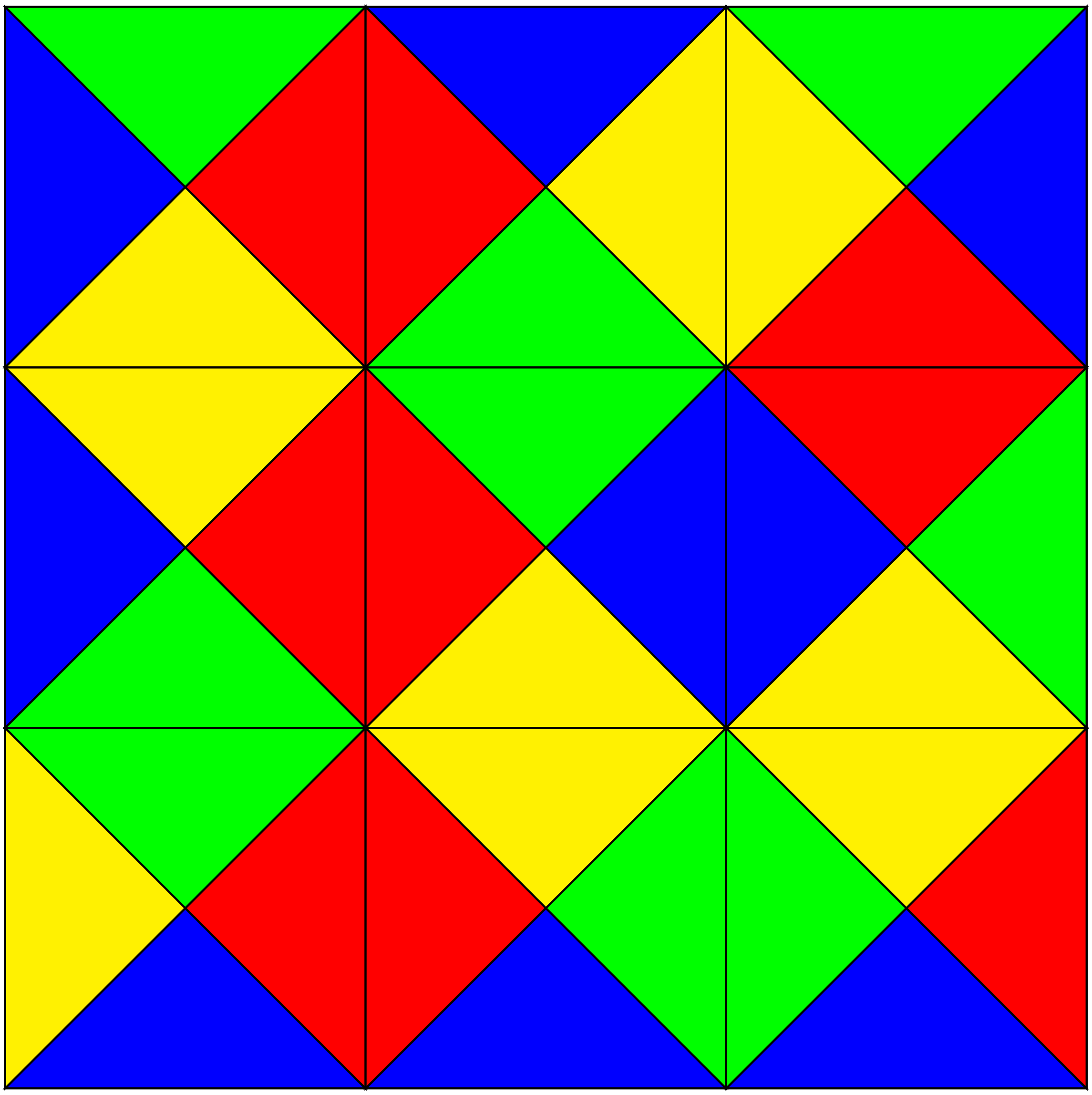


Solution du défi 93

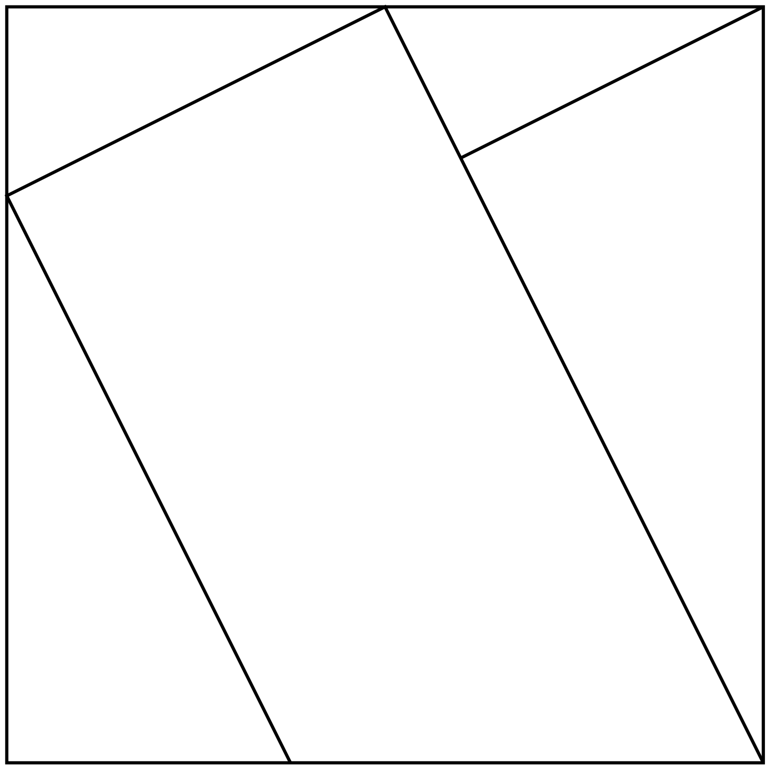
Au moins une solution par date…



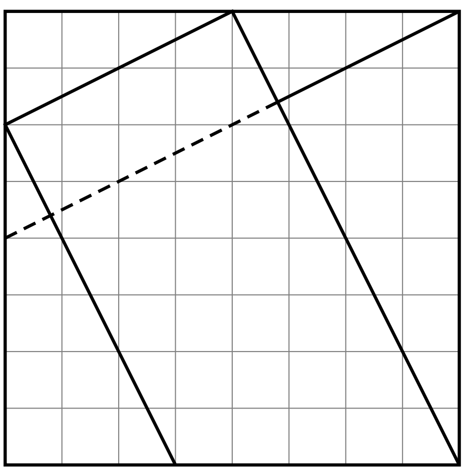
Solution du défi 94

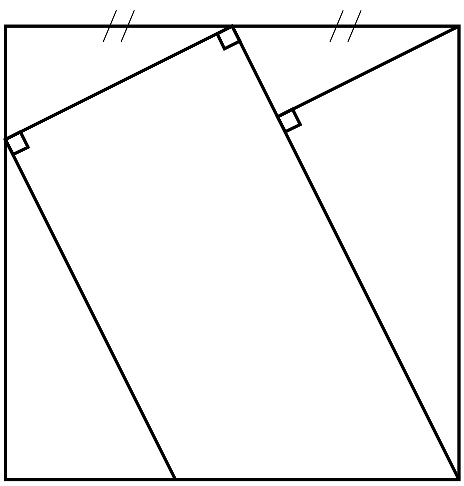


Solution du défi 95

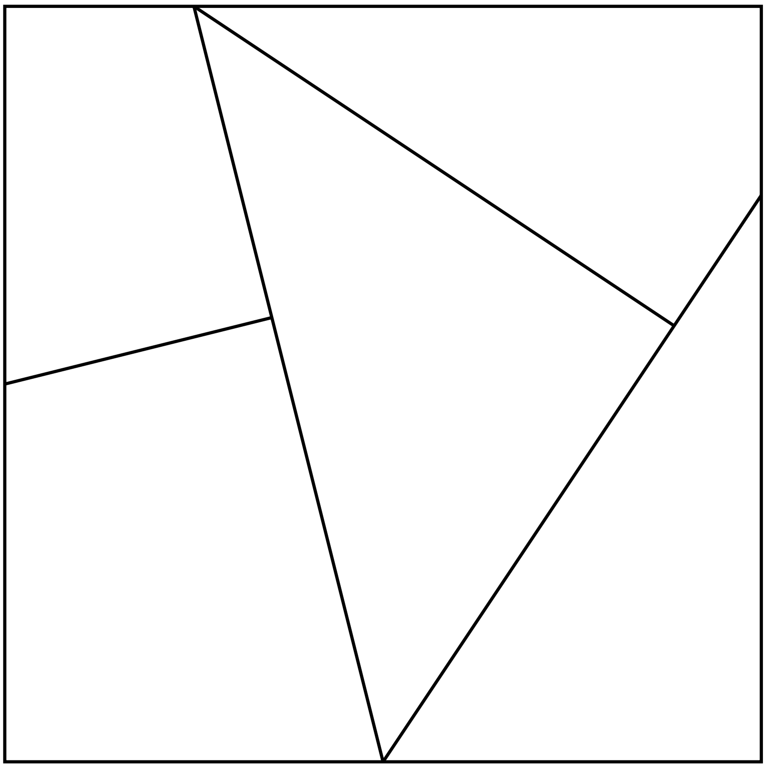


Construction des pièces du puzzle

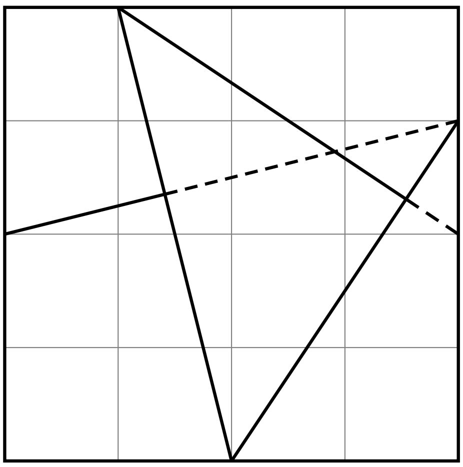




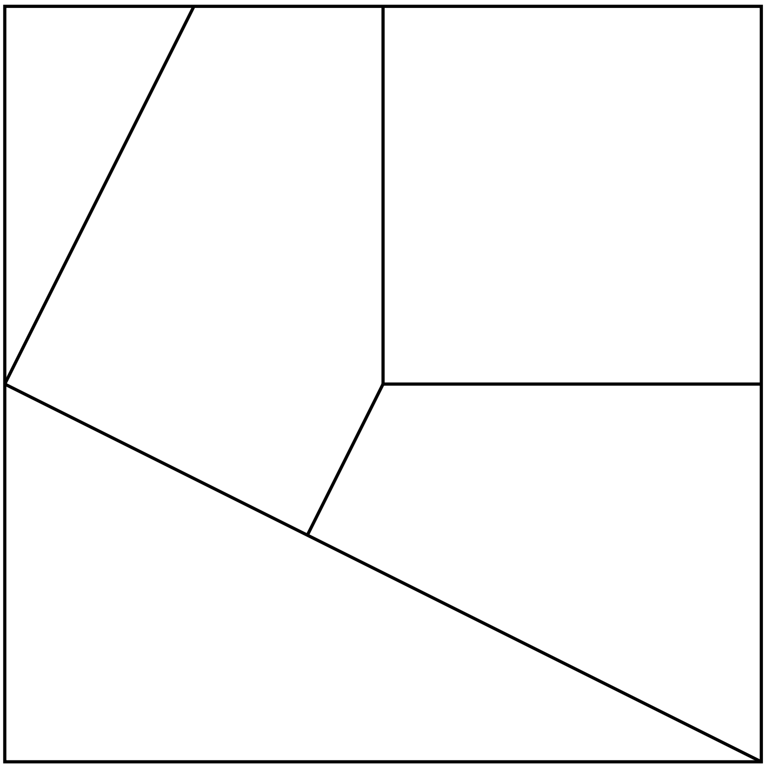
Solution du défi 96



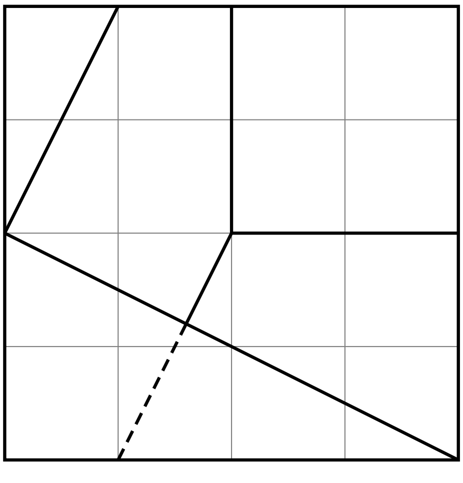
Construction des pièces du puzzle



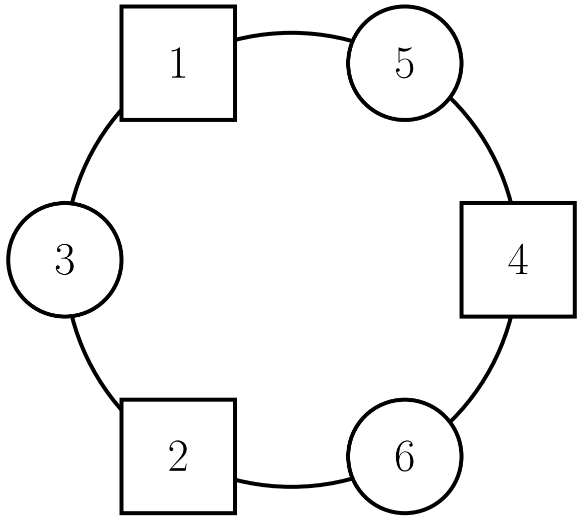
Solution du défi 97



Construction des pièces du puzzle



Solution du défi 98



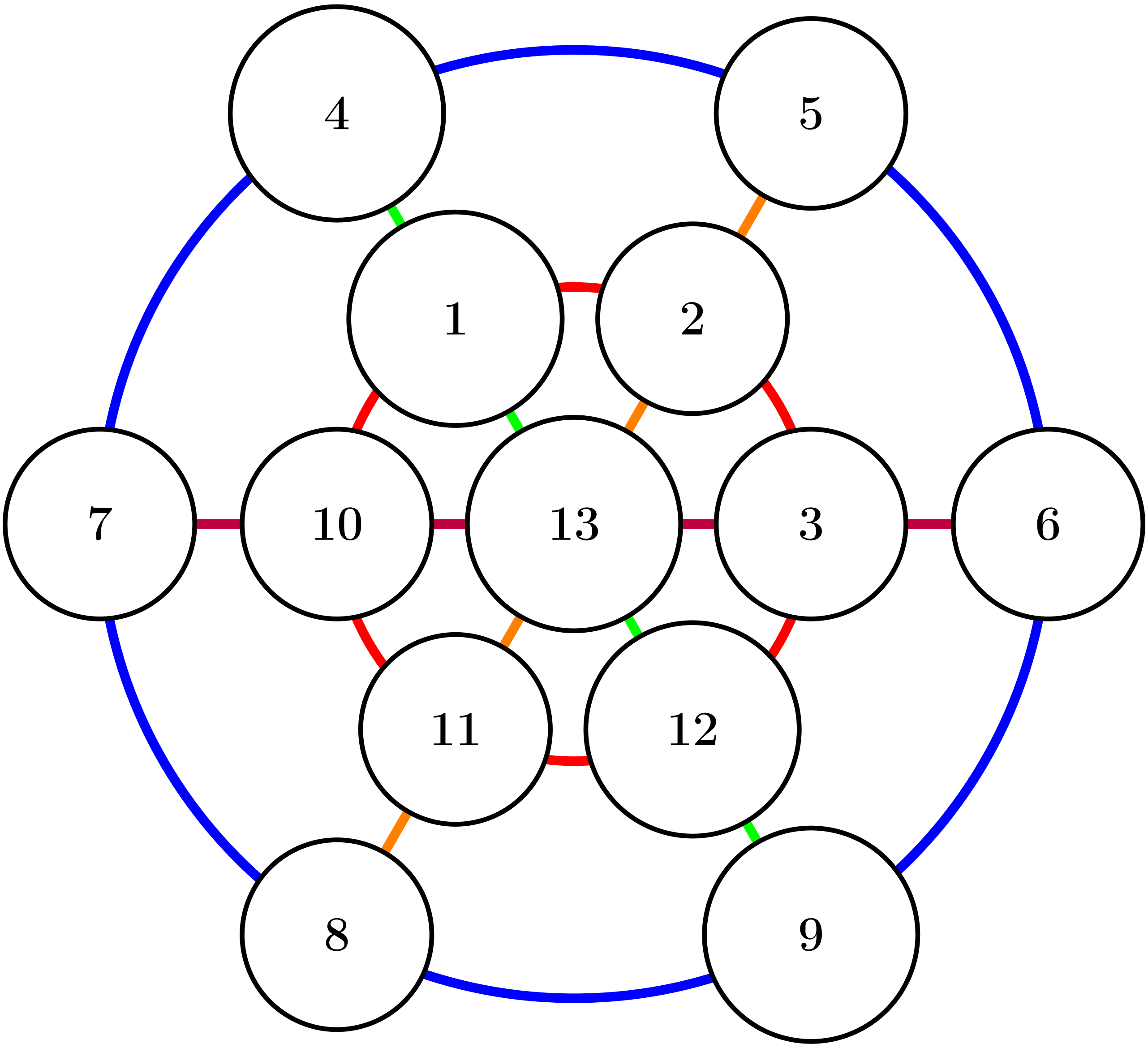
Solution du défi 99

La somme des nombres de 1 à 13 est 91 ; celle des nombres des deux cercles est 78.

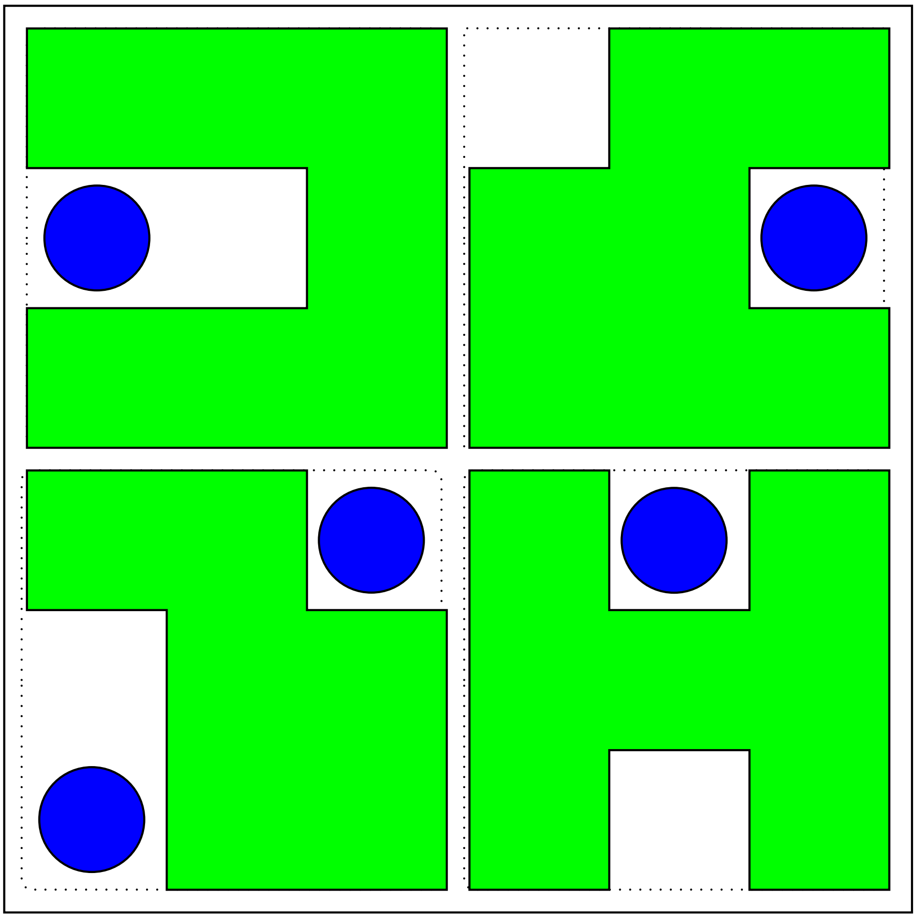
Le jeton du centre est $91 - 78 = 13$.

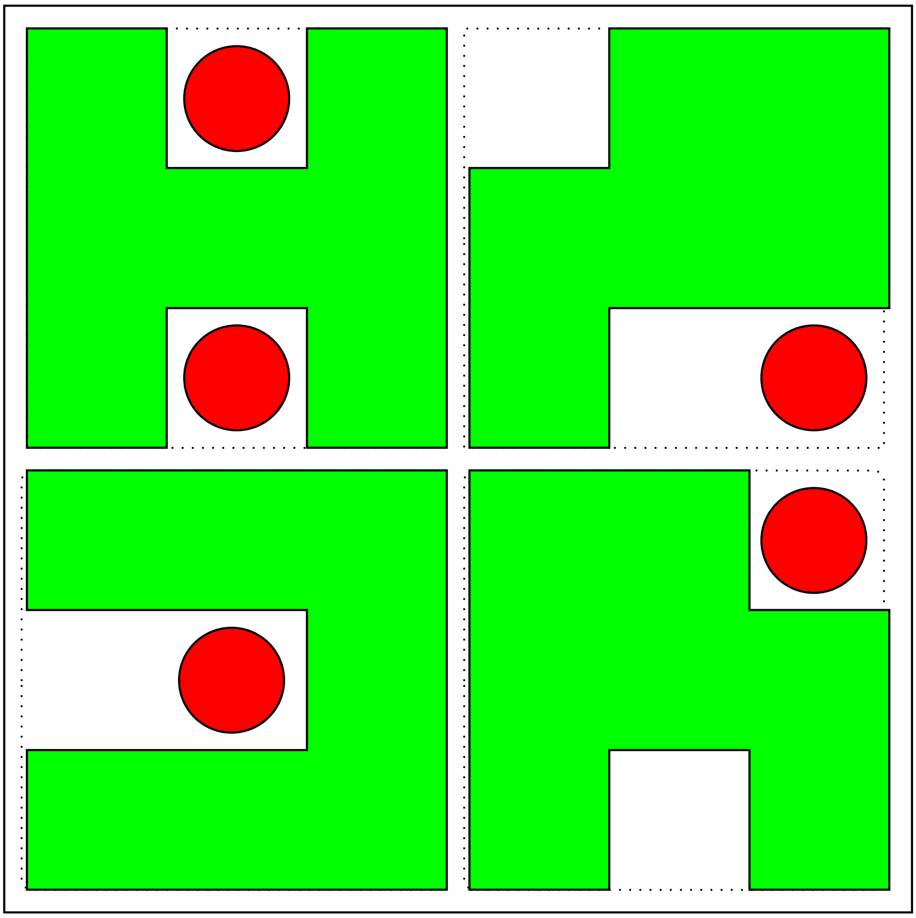
Avec les douze jetons restants de 1 à 12, on forme alors des couples de deux nombres dont la somme est 13 : (1, 12), (2, 11), (3, 10), etc. On place simultanément un couple dans la même rangée et dans la même couronne. On commence par compléter les rangées dont un élément est connu.

Voici une disposition :



Solution du défi 100





Solution du défi 101