

La typologie de Gérard Vergnaud

ou variations sur $13 + 8 = 21$

Les problèmes additifs sont des problèmes ternaires. Ils reposent sur trois nombres dont un est inconnu. Ils mettent en jeu une addition ou une soustraction.

Construire le champ conceptuel des problèmes additifs, c'est installer l'invariant " $x + y = z$ ", c'est savoir effectuer le calcul " $x + y = ?$ ", et résoudre l'équation " $x + ? = z$ ", c'est aussi savoir repérer x , y et z dans les différents problèmes additifs.

1 Typologie

Gérard Vergnaud distingue six relations additives de base, que l'on peut trouver, pour certaines, dans un contexte ordinal ou cardinal :

1. la composition de deux états en un troisième (problèmes partie/tout, en contexte cardinal uniquement) :

Il y a deux sous-types, selon que ...

- on cherche le cardinal du tout, il faut faire une addition : *Il y a 13 pommes et 8 poires dans la corbeille de fruits. Combien cela fait-il de fruits ?*

codage : $\boxed{P_1} - \boxed{P_2} \Leftrightarrow \boxed{T ?}$

- on cherche le cardinal d'une partie, il faut faire une soustraction : *Il y a des pommes et des poires dans la corbeille de fruits. Il y a 21 fruits en tout, dont 13 pommes. Combien y a-t-il de poires ?*

codage : $\boxed{P_1} - \boxed{P_2 ?} \Leftrightarrow \boxed{T}$

2. la transformation d'une mesure initiale en une mesure finale : *Il y a 13 fruits dans la corbeille. On rajoute 3 bananes.*

On peut, à partir de là trouver six sous-types selon que l'on a affaire à une addition ou une soustraction, que l'on cherche l'état final, la transformation ou l'état initial.

- la transformation est un ajout et on cherche l'état final, il faut faire une addition :

Il y a 13 pommes dans la corbeille de fruits, on rajoute 8 pommes. Combien y en a-t-il maintenant ?

ou, dans un contexte ordinal,

Pierre joue au jeu de l'Oie, il est sur la case 12, il obtient 7, où arrivera-t-il ?

codage : $\boxed{I} \xrightarrow{\boxed{T+}} \boxed{F ?}$

- la transformation est un ajout et on cherche l'état initial, il faut faire une soustraction :

On ajoute 8 pommes dans la corbeille de fruits, il y en a maintenant 21. Combien de pommes y en avait-il avant qu'on en rajoute ?

$$\text{codage : } \boxed{\text{I ?}} \xrightarrow{\boxed{\text{T+}}} \boxed{\text{F}}$$

- la transformation est un ajout et on cherche la transformation, il faut faire une soustraction :

Il y avait 13 pommes dans la corbeille de fruits, on en a rajouté et maintenant il y en a 21. Combien en a-t-on rajouté ?

$$\text{codage : } \boxed{\text{I}} \xrightarrow{\boxed{\text{T+ ?}}} \boxed{\text{F}}$$

- la transformation est un retrait et on cherche l'état final, il faut faire une soustraction :

Il y a 21 pommes dans la corbeille de fruits, on enlève 8 pommes. Combien y en a-t-il maintenant ?

$$\text{codage : } \boxed{\text{I}} \xrightarrow{\boxed{\text{T-}}} \boxed{\text{F ?}}$$

- la transformation est un retrait et on cherche l'état initial, il faut faire une addition :

On retire 8 pommes dans la corbeille de fruits, il y en a maintenant 13. Combien de pommes y en avait-il avant qu'on en enlève ?

$$\text{codage : } \boxed{\text{I ?}} \xrightarrow{\boxed{\text{T-}}} \boxed{\text{F}}$$

- la transformation est un retrait et on cherche la transformation, il faut faire une soustraction :

Il y avait 21 pommes dans la corbeille de fruits, on en a enlevé et maintenant il y en a 13. Combien en a-t-on enlevé ?

$$\text{codage : } \boxed{\text{I}} \xrightarrow{\boxed{\text{T- ?}}} \boxed{\text{F}}$$

3. la relation de comparaison entre deux mesures : Il y a quatre sous-types, selon que l'on cherche le cardinal de l'une ou l'autre collection ou la différence, ou la somme.

- On cherche l'un des deux états, on connaît un écart positif.

Il y a deux corbeilles de fruits. Il y a 13 fruits dans la première corbeille, et 8 de plus dans la deuxième, combien y'en a-t-il dans la deuxième corbeille ?

$$\text{Codage } \boxed{\text{E}_1} - \boxed{\text{e+}} - \boxed{\text{E}_2 ?}$$

- On cherche l'un des deux états, on connaît un écart négatif.

Il y a deux corbeilles de fruits. Il y a 21 fruits dans la première corbeille, et 8 de moins dans la deuxième, combien y'en a-t-il dans la deuxième corbeille ?

$$\text{Codage } \boxed{\text{E}_1} - \boxed{\text{e-}} - \boxed{\text{E}_2 ?}$$

- On connaît les deux états, on cherche l'écart positif.

Il y a deux corbeilles de fruits. Il y a 21 fruits dans la première corbeille, et

8 de dans la deuxième. Combien de fruits y a-t-il de plus dans la première corbeille que dans la deuxième ? Codage $\boxed{E_1} - \boxed{e+?} - \boxed{E_2}$

- On connaît les deux états, on cherche l'écart négatif.

Il y a deux corbeilles de fruits. Il y a 21 fruits dans la première corbeille, et 8 de dans la deuxième. Combien de fruits y a-t-il de moins dans la deuxième corbeille que dans la première ? Codage $\boxed{E_1} - \boxed{e-?} - \boxed{E_2}$

4. la composition de deux transformations : Codage $\boxed{E_{initial}} \xrightarrow{\boxed{T_1}} \boxed{E_{inter}} \xrightarrow{\boxed{T_2}} \boxed{E_{final}}$

On peut chercher l'un des trois états ou l'une des deux transformations, lesquelles peuvent être additives ou soustractives, ou encore la transformation composée, d'où 24 sous-cas...

5. la transformation d'une relation : *Marie doit 20 € au boucher, elle lui a rendu 15 €, combien lui doit-elle encore ?*

6. la composition de deux relations : *Marie doit 30 € à sa fille, mais sa fille lui doit 12 €. Qui doit payer quelle somme à l'autre ?*

2 Commentaires

- Les deux dernières catégories sont moins utilisées.
- Les problèmes statiques sont plus difficiles que ceux qui décrivent une transformation d'état. Ainsi : *Il y a 21 fruits, des pommes et 13 poires, combien y a-t-il de pommes ?* est plus difficile que *Il y a 21 fruits, des pommes et des poires, j'enlève les 7 poires, combien reste-t-il de pommes ?*
Cependant on peut toujours scénariser l'exercice afin de le transformer en problème de transformation d'état.
- Dans le cadre des problèmes de transformation, on peut demander l'état final, la transformation ou l'état initial. La difficulté est croissante dans cet ordre, et on constate que les élèves en difficulté ont tendance à transformer l'énoncé vers une difficulté inférieure. Les problèmes où l'on cherche un état initial demandent la création d'une donnée abstraite.
- Les problèmes de distribution cumulée sont très difficiles :
- des difficultés parasites peuvent venir perturber la résolution :
Dans une classe de CE1, il y a des enfants de 7, 8 ou 9 ans. 22 élèves ont plus de 6 ans, 16 élèves ont plus de 7 ans et 11 élèves ont plus de 8 ans. Combien d'élèves ont 9 ans ? Combien d'enfants ont 7 ans ? Combien y a-t-il d'enfants dans la classe ?
Cet exercice est très peu réussi au CM2, car, en plus de la difficulté de l'inclusion, il y a des obstacles de représentations : un élève de 8 ans et demi a plus de 8 ans, mais il n'en a pas 9. D'autre part, les enfants ne maîtrisent pas l'inégalité large. Le contraire de "plus de 7", c'est "moins de 7". (Utilisation sociale implicite, cf. "combien d'enfants ont la moyenne?")
- Dans les problèmes parties-tout :

- Les problèmes où le tout est évoqué sont plus faciles que ceux où il ne l'est pas.
ex. Il y a 20 fruits : 10 bananes, 5 poires et des pêches. Combien y a-t-il de pêches ? est plus facile que *Il y a 10 bananes, 5 poires, et 5 pêches. Interprète : $10+5+5=20$.* car la quantité "fruits" n'est pas évoquée.
- Les problèmes où il y a un mélange sont encore plus difficiles car l'élève perd le repère des quantités initiales.
- Les problèmes de composition de transformations peuvent être très difficiles :
exemple du cheval.
Le fermier Jones mène son cheval à la foire afin de le vendre. Il le vend 1000 dollars à son voisin Smith. Pris de remords sur le chemin du retour, il fait demi-tour et retrouve Smith. Il lui demande à racheter le cheval. Smith accepte, mais pour 2000 dollars. Sitôt l'affaire conclue, il se ravise et demande à Jones de lui revendre le cheval. Jones accepte mais pour 3000 dollars. Le lendemain, après une nuit sans sommeil, Jones retourne voir Smith et lui rachète le cheval 4000 dollars. Lequel des deux a gagné de l'argent ? Combien ?
40 % de bonnes réponses, mais 100 % si on change de cheval.

3 La démarche ERMEL

La collection ERMEL propose une progression s'appuyant sur la typologie de Vergnaud, celle-ci est rattachée dans chacun des ouvrages.

L'étude des problèmes additifs est considérée sur l'ensemble de la scolarité du CP au CM2, avec des prolongements envisagés sur le collège.

La typologie des problèmes ne doit pas être considérée comme une hiérarchie absolue de la difficulté, mais comme une indication afin d'enrichir graduellement le répertoire de problèmes additifs d'une manière cohérente.

Dès le CP, on cherche des problèmes de différents types, mais essentiellement des deux premiers. (En fait dès la GS, les élèves sont confrontés à des problèmes de ces mêmes types.)

Le signe - est introduit dès le CP pour coder la solution de l'équation " $x+? = z$ ".

Les énoncés sont codés par rapport à la typologie de Vergnaud, avec indication du taux de réussite sur un panel important d'élèves.

exemple :

La maîtresse a 42 cahiers dans l'armoire. Le directeur lui apporte un carton de cahiers. La maîtresse a maintenant en tout 67 cahiers. Combien le directeur a-t-il rapporté de cahiers ?

Catégorie : eT+e, taux de réussite 39%, procédures : addition 45%, soustraction 15%, addition à trou 14%, surcomptage ou décomptage 5%, autres 24%.

3.1 exemples

1. Adrien sont deux frères. Ils comparent leur taille. Guillaume mesure 1 m 55 cm et Adrien 1 m 30 cm. Qui dépasse l'autre ? De combien de centimètres ?
2. Dans une classe de 24 élèves tous les élèves ont leur ardoise sauf 3. Combien d'élèves ont leur ardoise ?
3. Sarah veut peser son chat. Voici comment elle s'y prend. Sarah se pèse seule : elle lit 27 kg sur sa balance. Elle se pèse ensuite avec son chat et elle lit alors 33 kg. Combien le chat de Sarah pèse-t-il ?
4. Paul a 8 billes. Son copain Samuel lui donne 6 billes. Combien de billes Paul a-t-il maintenant ?
5. Au marché, Madame Dupuis a acheté 12 fruits. 8 de ces fruits sont des oranges et les autres sont des bananes. Combien Madame Dupuis a-t-elle acheté de bananes ?
6. Nicolas donne 20 F au libraire pour payer un journal. Le libraire lui rend 5 F. Quel est le prix du journal ?
7. Mathilde et Coralie sont deux sœurs. Elles comparent leur taille. Elles ont 15 cm de différence. Coralie, la plus petite, mesure 1 m 18 cm. Quelle est la taille de Mathilde ?
8. Yann et son père se sont pesés l'un après l'autre. Yann pèse 28 kg et son père 75 kg. Combien le père pèse-t-il de plus que le fils ?
9. Marie a 12 billes. Elle donne 3 billes à Julie. Combien de billes Marie a-t-elle maintenant ?
10. Lola joue au jeu de l'oie. Elle obtient un 6 et tombe sur une case qui indique de reculer de 3 cases. Elle arrive ainsi à la case 23. Sur quelle case se trouvait-elle avant de lancer le dé ?
11. Olivier a fait un collier avec 11 perles bleues et 8 perles rouges. Combien y a-t-il de perles sur le collier d'Olivia ?
12. Un croissant coûte 7 F. Akim donne 50 F à la boulangère. Combien recevra-t-il de monnaie ?
13. Jean et Thomas jouent aux billes. Thomas a perdu 12 billes. Il lui en reste 15. Combien de billes avait-il au début de la partie ?

14. Ce matin le marchand de glaces avait 434 esquimaux en stock. Ce soir il lui en reste 100. Combien en a-t-il vendu ?
15. Anne veut acheter un pull. Elle hésite entre un pull gris à 95 F et un pull jaune à 87 F. Calcule la différence de prix entre les deux pulls.
16. Pierre achète un ballon en promotion. Son prix normal est de 140 F. En promotion il ne coûte que 128 F. Calcule l'économie qu'il a faite.
17. Il y a 18 crayons dans le pot sur le bureau de la maîtresse. Marie rapporte 7 crayons, puis Hugo emprunte 5 crayons. Combien y a-t-il maintenant de crayons dans le pot ?

problème n°	type	on cherche
1	comparaison	la différence
2	partie/tout	une partie
3	transformation ou partie/tout	recherche de T+une partie
4	transformation	état final
5	partie/tout	une partie
6	composition de transformations	la composée
7	comparaison	une des quantités
8	comparaison	la différence
9	transformation	état final
10	composition de transformations	état initial
11	partie/tout	le tout
12	composition de transformations	une des transformations
13	transformation	état initial
14	transformation	transformation
15	comparaison	différence
16	transformation d'une transformation	transformation
17	composition de transformations	état final